

UNIDAD 7

Cuadriláteros y simetría

En esta unidad vas a volver a considerar el tema de los cuadriláteros, que seguramente ya trabajaste en la escuela; por ejemplo, cuáles son, en qué se diferencian de otras figuras, cómo identificar algunas de sus propiedades a partir de analizar sus diagonales. Ahora vas a realizar actividades que te permitirán justificar, tanto experimentalmente como de manera formal, otras propiedades de los cuadriláteros. Muchas de esas propiedades vas a poder estudiarlas aquí, porque se ponen en evidencia al aplicar las transformaciones que estudiaste en la unidad anterior. Por lo tanto, vas a volver a estudiar los movimientos de traslación, rotación y simetrías, para analizar los cuadriláteros.

Esas transformaciones se denominan también isometrías; esta palabra proviene del griego (*isos*: igual) y significa igual medida. En este caso, es posible llamarlas así porque se trata de transformaciones que conservan las medidas de las longitudes, de los ángulos y de las superficies de las figuras del plano.



En la próxima actividad vas a necesitar varios sorbetes o varillas y hojas de papel liso.

TEMA 1: CUADRILÁTEROS Y SIMETRÍAS

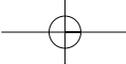
Antes de avanzar en el análisis de las transformaciones, vas a revisar propiedades de los cuadriláteros a partir de comparar sus lados.



1. Características de los cuadriláteros

Así como en la unidad 7 del *Cuaderno de estudio 1* estudiaste algunas propiedades de los cuadriláteros a partir de las propiedades de sus diagonales, ahora vas a estudiar nuevamente los cuadriláteros, pero a partir de observar la congruencia de sus lados y sus ángulos. También vas a ver si las rectas a las que pertenecen los lados son paralelas o no. Para todo ello trabajarás con sorbetes o varillas.

- a) Tomá cuatro sorbetes o varillas y colocalos sobre una hoja de manera que se corten formando los bordes de un cuadrilátero cualquiera, cuyos lados no sean congruentes ni paralelos ni perpendiculares.
- b) Dibujá en tu carpeta cuadriláteros del mismo tipo del que formaste con las varillas.



UNIDAD 7

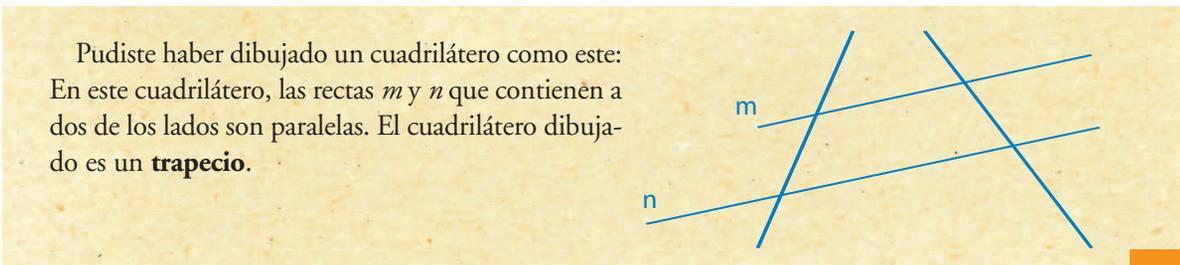


Dos figuras son **congruentes** cuando al superponerlas coinciden exactamente.

El símbolo \neq se lee: “es distinto que” o bien “no es congruente con”.

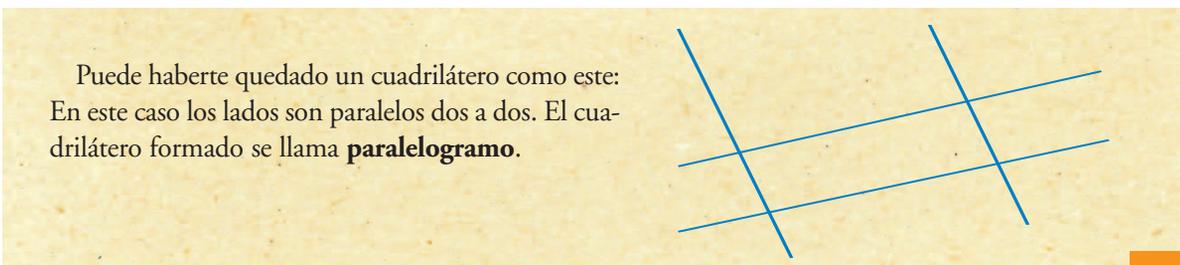
El símbolo \parallel se lee “es paralelo a”.

- c) Volvé a tomar los sorbetes y ahora colocalos de manera que el cuadrilátero que se forme tenga todos sus lados no congruentes y dos de ellos sean paralelos.



- d) Dibujá un cuadrilátero como el mencionado en tu carpeta, ponle nombres a los vértices, escribí cómo se llama y, en símbolos, sus particularidades con relación a los lados y los ángulos.

- e) Volvé a tomar los sorbetes y colocalos sobre una hoja de papel tratando de copiar la posición de ese trapezio. Mové un solo sorbete de modo que quede paralelo al opuesto.



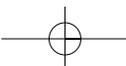
- f) Dibujá en tu carpeta un paralelogramo y escribí simbólicamente sus propiedades.

- g) Continuarás construyendo cuadriláteros. Para ello, colocá sobre la hoja los cuatro sorbetes o varillas de modo que cumplan las siguientes condiciones:

1. dos varillas son perpendiculares y,
2. cada una de las otras dos es paralela a una de las anteriores.

- h) Dibujá en tu carpeta un cuadrilátero como el que se formó.

1. Observá si los lados consecutivos son iguales o no. ¿Cómo son los ángulos?



2. Escribí el nombre del cuadrilátero y sus propiedades. Si te hace falta, consultá la clasificación en la unidad 7 del *Cuaderno de estudio 1* o bien recurrí a tu docente para que te ayude en la búsqueda de los nombres.
3. ¿Qué cambiarías en la posición de las varillas para que se forme un rombo no cuadrado?
- Hacelo. ¿Cómo son sus ángulos?
 - Escribí simbólicamente las propiedades del rombo que podés observar.
- i) A partir de la formación de un rombo, ¿cómo cambiarías la posición de las varillas para formar un romboide?
1. ¿Cómo son sus lados?, ¿y sus ángulos?
 2. Dibujá el romboide y describí sus propiedades.



A través de la actividad anterior, revisaste algunas clases de cuadriláteros a partir del análisis de sus lados; ahora vas a avanzar en el análisis a partir de las transformaciones. Empezarás por considerar la simetría. Consultá con tu docente cuáles de las consignas de la actividad siguiente vas a resolver, y si lo harás solo o con tus compañeros.



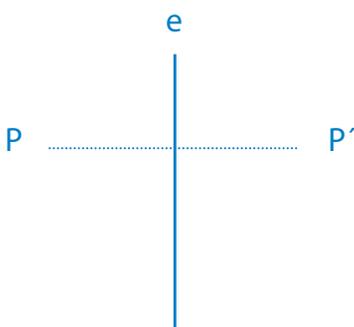
Para realizar todas las actividades de esta unidad que siguen es necesario que cuentes con hojas de papel liso, algunas de papel de calcar y cuadriculadas, los útiles de Geometría y una tijera.



2. ¿Cuándo una figura es simétrica?

Como ya viste en la unidad anterior, la simetría es una transformación que vincula los puntos del plano de acuerdo con la siguiente definición: dos puntos de un plano son **simétricos** respecto de un eje si se encuentran sobre una recta perpendicular al eje y a la misma **distancia** de él.

- a) Tomá una hoja de papel de calcar y marcá un punto cualquiera T . Doblá la hoja en dos partes por una línea a la que no pertenezca T . Calcá el punto T y llamá T' a la imagen T . Luego remarca el dobléz con lápiz de color:
1. Trazá el segmento determinado por esos dos puntos: T y T' .
 2. ¿Cómo son entre sí la recta que contiene el dobléz y el segmento determinado por los puntos T y T' ?
 3. Compará las distancias que hay entre cada uno de los puntos y el eje.
 4. Observá el siguiente gráfico y leé el recuadro. Te permitirá revisar el gráfico que realizaste y retomar la definición anterior.



UNIDAD 7



Una simetría de eje e transforma un punto P del plano en otro punto P' del plano, tal que el segmento PP' es perpendicular a la recta e y la distancia del punto P al eje e es igual a la distancia del punto P' al eje.

5. Verificá si la recta e es perpendicular al segmento PP' , comprobando que los cuatro ángulos que se forman son congruentes.



Si la recta e es perpendicular al segmento y las distancias de los puntos a dicha recta son iguales, la recta es el **eje de simetría** y los puntos marcados son simétricos respecto de dicho eje.

b) Para seguir estudiando el eje de simetría resolvé en tu carpeta las siguientes consignas.

1. Dibujá un segmento AA' , determiná su punto medio y marcá el eje e de simetría del segmento.
2. Elegí otro punto que pertenezca al eje y llamalo M .
3. Trazá las distancias de M a los extremos del segmento AA' y medilas.
4. Marcá otro punto que pertenezca al eje de simetría y hacé lo mismo.
5. Compará las distancias que hay desde cada punto del eje a los extremos del segmento AA' determinado por pares de puntos simétricos.

Habrás comprobado que estas distancias son iguales y, como aprendiste en la consigna **a**, el eje de simetría es perpendicular al segmento que tiene como extremos dos puntos simétricos.



Recordá que la recta perpendicular a un segmento que lo corta en su punto medio es el eje de simetría y se llama **mediatriz** del segmento.

Con estos elementos, es posible dar una nueva definición de **puntos simétricos**:
 Dos puntos son simétricos respecto de un eje si la **mediatriz** del segmento determinado por dichos puntos es el **eje de simetría** del segmento.

c) Para aprender a construir figuras simétricas con papel y tijera seguí las siguientes instrucciones:

1. Tomá una hoja de papel y doblala por la mitad.
2. Pensá en la figura que querés que salga recortada. Dibujá la mitad de esa figura en una de las superficies de la hoja doblada y recortá la hoja doblada siguiendo tu dibujo. Considerá como ejemplo el siguiente dibujo.



3. Abrió la figura recortada y marcó un punto cualquiera. Dibujó el simétrico con respecto a la recta que contiene al dobléz.
4. Observó la ubicación de esos puntos. ¿Ocurre lo mismo con otros puntos de la figura?

Si tal como observaste el simétrico de cualquier punto de la figura pertenece a ella se puede enunciar que una figura es simétrica respecto de un eje cuando todo punto de ella tiene como simétrico otro punto de la misma figura. Y también que una figura es simétrica si se puede determinar una línea que la divida en dos partes de modo que al doblarla por ella ambas partes se pueden superponer exactamente.

Ahora que ya sabés cuándo una figura es simétrica, vas a profundizar en el estudio de los elementos y las propiedades de los cuadriláteros en relación con la simetría. En la siguiente actividad aprenderás a encontrar cuadriláteros simétricos y determinarás aquellos elementos que son sus ejes de simetría.

TEMA 2: CUADRILÁTEROS SIMÉTRICOS



3. Ejes de simetría en los cuadriláteros

- a) Comenzá trabajando con rectángulos, según las siguientes consignas.
 1. Dibujá y recortá dos rectángulos.
 2. A cada uno doblalo en dos, tratando que las partes que se forman coincidan. En caso de lograrlo, la línea del dobléz es eje de simetría y los rectángulos resultan simétricos con respecto a ese eje.
 3. Pegá en tu carpeta estos rectángulos y marcá el o los ejes de simetría que hayas encontrado.
- b) Observá la ubicación de los ejes de simetría del rectángulo, leé esta definición y respondé a las preguntas.



El segmento determinado por los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero se llama **base media**.



UNIDAD 7

1. Las bases medias de un rectángulo ¿pertenecen a las mediatrices de los lados? ¿Son sus ejes de simetría? ¿Por qué?
2. Las diagonales de un rectángulo ¿son sus ejes de simetría? ¿Por qué?
3. Tomá uno de los rectángulos con los que trabajaste, dibújalo en tu carpeta y llámalo **ABCD**.
4. Marcá uno de sus ejes de simetría, llámalo **e**. En la simetría de eje **e**, ¿qué punto es el simétrico del vértice **A**? ¿Qué punto es el simétrico de **B**? ¿Dónde están ubicados los puntos simétricos de los puntos que pertenecen al eje?



Cuando en una transformación un punto coincide con su imagen se dice que es un **punto doble** en esa transformación. O bien: si un punto se transforma en sí mismo, se dice que es un **punto doble** o **invariante**.

5. En las simetrías del rectángulo, ¿dónde se localizan los puntos dobles?
 6. Al aplicar las simetrías de un cuadrado, ¿qué puntos son invariantes?
- c)** Dibujá y recortá dos paralelogramos cualesquiera que no sean rombos. Trazá sus diagonales y doblalos por cada diagonal. Escribí en tu carpeta las respuestas a estas preguntas y mostráselas a tu docente.
1. ¿Son coincidentes las partes que se forman? ¿Por qué?
 2. Volvé a tomar esos paralelogramos e intentá, haciendo otros dobleces, que las partes en que los dividís sean coincidentes.
 3. Las bases medias de un paralelogramo ¿son sus ejes de simetría? ¿Por qué?
 4. Las diagonales de un paralelogramo ¿son sus ejes de simetría? ¿Por qué?
- d)** Además de rectángulos y paralelogramos hay otros cuadriláteros particulares. Para averiguar si algunos de ellos son simétricos, y en el caso de serlo determinar cuál o cuáles son sus ejes de simetría, dibujá y recortá en papel dos trapezios isósceles, dos romboides, dos rombos y dos cuadrados.
1. Doblá cada uno de ellos buscando que las partes en que los dividiste coincidan exactamente una con otra.
 2. Cuando así suceda, marcá el doblez (eje de simetría) de la figura con la que estás trabajando.
 3. ¿Cuáles de las figuras nombradas tienen ejes de simetría?
 4. En cada una de ellas indicá, cuando sea posible, si esos ejes son elementos de la figura, por ejemplo, bases medias y/o diagonales.
 5. Pegá los cuadriláteros en tu carpeta, explicá lo que hiciste y escribí tus conclusiones.
 6. Compará tus conclusiones con las de otro compañero y muéstráselas a su docente.



4. Propiedades de los cuadriláteros simétricos

En las actividades anteriores trabajaste recortando figuras dibujadas en papel liso. Ahora vas a trabajar con un par de ejes cartesianos x e y dibujados sobre papel cuadrículado para explorar las relaciones entre las coordenadas de puntos del plano, simétricos con relación a esos ejes.

- Trabajá sobre papel cuadrículado. Trazá un par de ejes perpendiculares x e y . En el cuadrante inferior izquierdo dibujá un paralelogramo con sus vértices en puntos de la cuadrícula. Llamalo $ABCD$ y anotá las coordenadas de los vértices.
- Pensá: ¿en qué cuadrante se ubicaría el paralelogramo $A'B'C'D'$ simétrico de $ABCD$ con respecto al eje y ? ¿Qué coordenadas tendría? Escribilas. Verificá tu anticipación dibujando $A'B'C'D'$. ¿En qué cuadrante estaría ubicado el paralelogramo simétrico de $ABCD$ con respecto al eje x ? ¿Cuáles serían sus coordenadas?
- Seguí trabajando sobre papel cuadrículado, marcá tres puntos no alineados P , Q y R , anotá sus coordenadas. ¿Qué coordenadas tendrá un punto T tal que el cuadrilátero $PQRT$ sea un paralelogramo? ¿La solución es única? ¿Por qué?
- Escribí en tu carpeta un comentario sobre lo que aprendiste y mostráselo a tu docente.



5. Cuadriláteros: propiedades y simetría

Para poner en práctica lo que aprendiste en esta unidad, resolvé esta actividad porque te permitirá hacer una síntesis de lo aprendido.

- Plegá un papel de modo que puedas obtener un cuadrado haciendo un solo corte.
- Doblando y recortando convenientemente una hoja de papel, construí figuras simétricas que posean dos ejes de simetría. Indicá los ejes y pegalas en tu carpeta.
- ¿Hay cuadriláteros con cuatro ejes de simetría? ¿Con sólo tres? ¿Con sólo dos? ¿Con sólo uno? ¿Cuáles no son simétricos?



UNIDAD 7

d) Completá en tu carpeta el siguiente cuadro escribiendo *SÍ* o *NO* en cada casilla.

PROPIEDADES	Trapezio isósceles	Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado
Por lo menos una diagonal es eje de simetría					
Cada diagonal es eje de simetría					
Por lo menos una base media es eje de simetría					
Cada base media es eje de simetría					

Para finalizar

En esta unidad exploraste la posición de las rectas a las que pertenecen los lados de los cuadriláteros y vinculaste las propiedades de sus lados y sus ángulos con la posibilidad de establecer si son figuras simétricas o no.

Descubriste que existen algunos cuadriláteros con uno, dos o cuatro ejes de simetría, y que ellos son elementos geométricos particulares de esas figuras.

En el caso del cuadrado habrás encontrado que posee cuatro ejes de simetría, las dos diagonales y las dos bases medias, mientras que el rectángulo tiene dos ejes de simetría que son sus bases medias.

Habrás descubierto que sólo los trapezios isósceles tienen un eje de simetría que es la recta perpendicular a los lados paralelos trazada por los puntos medios de ellos. Esa recta es la mediatriz del lado.

Has comprobado también una propiedad importante: los puntos que pertenecen al eje de simetría son los únicos puntos dobles, vale decir que son simétricos de sí mismos. Por último, pudiste observar la relación que existe entre las coordenadas de puntos simétricos ubicados en diferentes cuadrantes.

En las unidades siguientes aplicarás estos conocimientos al estudio de otros temas geométricos.

A continuación, podrás practicar varios de los temas que estudiaste a lo largo del año en relación con números, combinatoria y Geometría, y comprobar algunas curiosidades aritméticas resolviendo estos desafíos matemáticos.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Los relojes

Si tenés dos relojes de arena, uno de 3 minutos y otro de 8 minutos, ¿cómo podés usarlos para controlar la cocción de una comida que debe estar cocándose exactamente durante 13 minutos?

2. Los libros

En la biblioteca hay libros de todo tipo. Gabriel quiere sacar 10 libros de tres tipos diferentes –policiales, aventura y ciencia ficción– para distribuirlos entre sus compañeros. Su elección incluye por lo menos un libro de cada tipo.

¿De cuántas maneras distintas pudo elegir los libros?

3. Divisiones exactas

Elegí un número de tres cifras y formá otro de seis cifras repitiendo el primero. Por ejemplo: 145.145.

Dividí este número entre 7; después dividí el cociente entre 11 y, por último, el nuevo cociente entre 13.

Comprabá si las divisiones parciales que has encontrado son exactas y al final obtenés tu número inicial.

Respondé: ¿por qué sucede eso con cualquier número de tres cifras?

4. Con un poco de historia

Para calcular el área de un triángulo siempre has buscado como datos la longitud de uno de los lados y la de la altura correspondiente a ese lado. Sin embargo, hay otra forma de calcularla, conociendo la longitud de los tres lados. Consiste en aplicar la fórmula de Herón.

Herón de Alejandría fue un ingeniero griego que vivió posiblemente en el siglo I después de Cristo. Describió un gran número de máquinas sencillas y generalizó el principio de la palanca de Arquímedes. En Matemática pasó a la historia sobre todo por la fórmula que lleva su nombre y que permite calcular el área de un triángulo conocidos sus tres lados, aparecida por primera vez en su obra *La Métrica*.

La fórmula de Herón es la siguiente $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ en la que A es el área de un triángulo; a , b y c los lados y p el semiperímetro: $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Con toda la información sobre la fórmula de Herón que aparece en esta página, dibujá dos triángulos cualesquiera, medí sus lados, la altura correspondiente a uno de ellos y calculá sus áreas de las dos formas que conocés.

a) Compará los resultados.

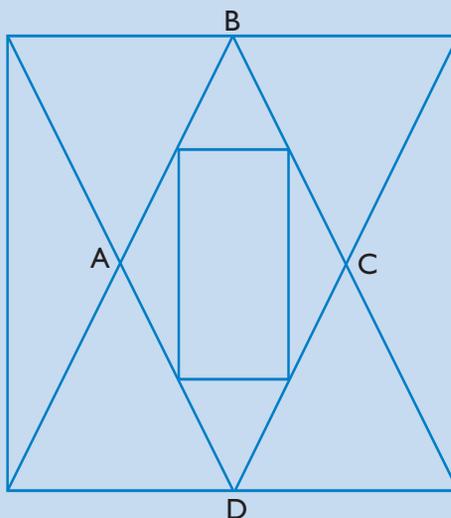
b) ¿Cómo podés hacer para calcular la altura de un triángulo conociendo las longitudes de sus lados?

UNIDAD 7

5. Fracciones

En la siguiente figura, B y D son los puntos medios de los lados del cuadrado, y los vértices del rectángulo central son los puntos medios de los lados del rombo $ABCD$.

Calcula qué parte del área del cuadrado representa el área del rectángulo central.



6. La escuela pitagórica

Se dice que cuando le preguntaban a **Pitágoras** (célebre matemático nacido en Grecia, en la isla de Samos, a mediados del siglo IV a.C.) la cantidad de personas que frecuentaban su escuela daba como respuesta:

“La mitad estudia sólo matemática; la mitad del resto se interesa nada más que por la música; una séptima parte asiste pero no participa y, además, vienen tres ancianos.”

1. ¿Cuántas personas concurrían a su escuela?
2. ¿Cuántas se dedicaban a la matemática y cuántas a la música?

