

UNIDAD 5

Probabilidad

En esta unidad vas a introducirte en el mundo del cálculo de probabilidades, es decir, vas a enterarte de cuáles son las estrategias matemáticas que permiten predecir cuándo un acontecimiento va a ocurrir siempre de la misma manera, cuándo es seguro que no ocurrirá o cuándo es probable que pase de un modo o de otro.

A medida que avances en el desarrollo de esta unidad distinguirás los sucesos inciertos – o aleatorios – de los que son imposibles y los sucesos seguros de los que son inciertos, y verás cómo se puede calcular la probabilidad de que ocurra un suceso.



Para realizar los experimentos de la actividad 2 vas a necesitar: una moneda y dos dados. Andá buscando los materiales con anticipación.

TEMA 1: CÁLCULO DE PROBABILIDADES



1. Imposible, 0; Seguro, 1

a) ¿ Podrías afirmar que hay cosas que jamás se puede esperar que sucedan?

1. Probá tu respuesta con el siguiente listado de experimentos y de sucesos que se pueden esperar como resultado de ellos.

- Arrojar un dado y obtener un número mayor que 6.
- Arrojar dos dados y obtener como suma un número menor que 13.
- Arrojar dos dados, restar los resultados y obtener como diferencia 6.
- Arrojar una moneda y obtener cara.
- Encontrar entre los renglones de esta página uno que tenga 150 letras.
- Arrojar un dado y que salga un número par.
- Encontrar una persona que tenga 3 m de altura.
- Dar vuelta un tazón con piedrecillas y que no caiga ninguna.
- Arrojar una piedra hacia arriba y que luego caiga.
- Esconder una piedra en un puño y que otra persona adivine en qué mano está.
- Observar que el Sol se pone por el Este.
- Colocar un trozo de hielo en agua tibia y que se derrita.
- Calentar agua a 100 °C y que no hierva.



UNIDAD 5

2. Examiná cada uno de los experimentos de la lista, seleccioná aquellos que considerás como “sucesos imposibles”.
 3. Copiá el listado en tu carpeta y agregá otros dos ejemplos que se te ocurran.
- b) Releé el listado anterior, seleccioná y copiá de la lista los que consideres “sucesos seguros” y agregá otros dos ejemplos que se te ocurran.
- c) Releé los listados que escribiste en tu carpeta. Compáralos con los de un compañero. Si tienen alguna diferencia, analicen en cada caso si los experimentos están correctamente seleccionados como sucesos imposibles o como sucesos seguros. Mostráselos a tu docente.
- d) Volvé a mirar el listado y fijate en los experimentos que no copiaste en los puntos anteriores. Esos son ejemplos de **sucesos probables** pero no seguros.

No hay ninguna duda acerca de cuántos días va a tener cada uno de los meses del año o de que el primer día de un nuevo año es el 1° de enero. Tampoco se duda de que el día posterior a un sábado será domingo.

Cuando se puede afirmar con toda certeza que algo va a ocurrir, como en el caso de los hechos anteriores, se dice que se trata de un **suceso seguro**. En cambio, hay otros acontecimientos cuyo resultado no se puede predecir con certeza porque dependen del azar. Por ejemplo, si se arroja al aire una moneda, no se puede asegurar si quedará cara o ceca hasta que haya caído. En los estudios de probabilidad se habla de experimentos y de sucesos. Son experimentos las experiencias que se hacen para obtener resultados y son sucesos los distintos resultados que se obtienen haciendo los experimentos. Por ejemplo, el **experimento** que consiste en arrojar una moneda tiene dos **resultados** o **sucesos posibles**: cara y ceca.



En Matemática, la probabilidad de que ocurra un suceso se puede medir asignándole un número. A los sucesos imposibles les corresponde la **probabilidad 0** y a los sucesos seguros, la **probabilidad 1**. Los demás sucesos posibles pero no seguros tienen una probabilidad comprendida entre 0 y 1.

Al efectuar un experimento es importante considerar la probabilidad de ocurrencia (éxito) y de no ocurrencia (fracaso) de determinado resultado.



Se llama probabilidad de un suceso ($P(s)$) a la razón entre el número de casos favorables (f) y el número total de casos posibles (t). En símbolos, $P(S) = \frac{f}{t}$. Por ejemplo, la probabilidad de obtener un 3 al arrojar un dado es la razón entre 1 (caso favorable) y 6 (casos posibles); o sea que $P(3) = \frac{1}{6}$.



En la siguiente actividad vas a calcular la probabilidad de un suceso a partir de experiencias cuyo resultado no es seguro ni imposible porque dependen del azar, por ejemplo: arrojar una moneda al aire, el lanzamiento de un dado, o de dos dados simultáneamente, y el juego “Piedra, papel y tijera”.

Es posible que parte de esta actividad la resuelvas en tu casa y que para otras necesites reunirte con un compañero. Consultá con tu docente cómo organizar la tarea.



2. Cuatro situaciones

Esta actividad consiste en la resolución de cuatro experimentos diferentes que te van a permitir analizar distintas situaciones de probabilidad.

a) Primer experimento: arrojar una moneda al aire

Seguramente habrás jugado muchas veces al “cara o ceca” con una moneda. La tirás al aire y la moneda cae con alguna de sus dos caras hacia arriba: solo hay dos opciones, “cara” o “ceca”.

a) Realizá la experiencia, registrá las veces que sale cara y anotá las respuestas en tu carpeta:

1. Tirá la moneda al aire 10 veces; ¿cuántas veces resulta cara?
2. ¿Y cuando la arrojás 20 veces?
3. ¿Y cuando la arrojás 50 veces?
4. Si la tiraras 100 veces, ¿cuántas veces creés que resultará cara?, ¿y si la tiraras 1000 veces?
5. ¿Creés que el número de “cecas” será muy distinto al número de caras? ¿Por qué?
6. ¿A qué fracción se aproxima la razón, es decir, el cociente, entre el número de “cecas” y el número de tiros?



En esta experiencia, el número de casos posibles es 2: cara y ceca.

La probabilidad de que al lanzar una moneda resulte cara es:

$$P(\text{cara}) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

La probabilidad de que en el mismo lanzamiento no resulte cara es: $P(\text{no cara}) = \frac{1}{2} = 0,5$.

La suma de ambas probabilidades es $P(\text{éxito}) + P(\text{fracaso}) = 1$, o sea $0,5 + 0,5 = 1$.

UNIDAD 5



b) Segundo experimento: lanzamiento de un dado

1. Tirá el dado 50 veces y registrá en tu carpeta, en una tabla como esta, los números que aparecen en la cara superior. Podés dibujar un palito cada vez que obtengas el número. Cuando hayas hecho 4 palitos dibujá el quinto atravesando los anteriores. Así, te van a quedar dibujados grupos de 5 palitos que te facilitarán el conteo al final.



Cara del dado	1	2	3	4	5	6
Palitos que registran las tiradas						
TOTAL						

2. Si tenés oportunidad de trabajar con otros compañeros, sumen los resultados de todos, cara por cara, y escribanlos en una tabla como esta:

Cara del dado	1	2	3	4	5	6
Suma de los resultados						

- 3. Fijáte si los números que indican el total de veces que apareció cada cara del dado son muy diferentes.
- 4. ¿Cuál es la conclusión de esta experiencia?

En el lanzamiento de un dado, las seis caras tienen la misma probabilidad de caer hacia arriba; de este tipo de observaciones surge la siguiente relación:

Si queremos que al lanzar un dado resulte el número 2, su probabilidad es: $P(2) = \frac{1}{6}$ porque el dado tiene una sola cara con el número 2 y tiene seis caras diferentes.

Lanzamiento de un dado						
Cara del dado	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	$P(1) = \frac{1}{6}$	$P(2) = \frac{1}{6}$	$P(3) = \frac{1}{6}$	$P(4) = \frac{1}{6}$	$P(5) = \frac{1}{6}$	$P(6) = \frac{1}{6}$

Al observar el cuadro que sintetiza el lanzamiento de un dado, se comprueba que las 6 caras tienen la misma probabilidad de caer hacia arriba.



Dos o más sucesos que tienen la misma probabilidad de ocurrir se llaman **equiprobables**.

Si una experiencia se repite pocas veces, los resultados suelen parecer caprichosos. En cambio, a medida que se la reitera un número importante de veces, se puede observar que los resultados adquieren cierta regularidad vinculada con la probabilidad del suceso.

Después de un número suficientemente alto de pruebas, la probabilidad de un suceso se identifica con la frecuencia relativa. Se trata de una estimación que se considera más fiable a medida que aumenta el número de pruebas. La frecuencia relativa es un número que muestra en qué proporción se repite cada caso favorable con respecto al total. Suele expresarse como porcentaje.



Se llama **frecuencia relativa** de un suceso al cociente entre el número de éxitos y el número total de experiencias.

c) Tercer experimento: lanzamiento de dos dados

1. Para que esta experiencia te resulte más fácil utilizará dos dados de distinto color o de diferente tamaño. Para calcular el número de casos posibles, completá una tabla como la que aparece abajo y que indica en las columnas los resultados posibles de uno de los dados y en las filas, los del otro dado. Escribí en cada casilla la suma de las dos caras posibles: la que encabeza la fila y la que encabeza la columna.
2. ¿Cuántas sumas posibles registraste en el cuadro?



+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6				10		

UNIDAD 5

3. Para analizar si alguna suma tiene más probabilidad de salir que otras, completá una tabla como la siguiente en la que se muestran todas las posibilidades. Vas a indicar las sumas del cuadro anterior que dan el mismo resultado. Te damos como ejemplo las sumas 1, 2, 3, 4 y 12.

Resultado de la suma	Formas distintas de obtener el mismo resultado	Número de formas distintas
1	Suceso imposible	0
2	1 + 1	1
3	1 + 2; 2 + 1	2
4	1 + 3; 2 + 2; 3 + 1	3
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12	6 + 6	1
Total de sucesos distintos:		Total de formas distintas:.....

4. Observá la tabla anterior y respondé las preguntas en tu carpeta.

- Cuando se tiran simultáneamente dos dados, ¿cuántos resultados distintos puede tener la suma?
- ¿Cuántos casos dan como suma 7?
- ¿Cuántos casos dan como suma 8?
- ¿Cuántos casos dan como suma 11?
- ¿Todos estos sucesos tienen la misma probabilidad?
- ¿Cuál de todas las sumas tiene mayor probabilidad de ocurrencia?

5. Copiá la siguiente tabla y completala con la probabilidad de cada una de las sumas. Para calcularla recordá la definición.

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilidad	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				

6. Lee el siguiente problema y escribí en tu carpeta todos los comentarios que te sugiera la situación.

Dos jugadores, **A** y **B** juegan a arrojar simultáneamente dos dados y a calcular la suma. Si la suma es 6, 7 u 8, el jugador **A** se anota un punto. Si la suma es distinta de esos números, el jugador **B** se anota un punto.

7. ¿Considerás que **A** y **B** tienen la misma probabilidad de ganar? ¿Por qué?

d) Cuarto experimento: "Piedra, papel y tijera"



1. Si ya conocés el juego, jugá con algún compañero. Si no lo conocés, leé el recuadro siguiente y luego practicá con otro chico o con algún familiar.

• • • Piedra, papel o tijera

Dos jugadores empiezan el juego cada uno con una mano escondida tras la espalda. A la voz de "¡Ya!" muestran al mismo tiempo la mano que tenían tras la espalda, en una de las siguientes posiciones:



La mano cerrada representa la piedra.



Todos los dedos extendidos representan el papel.

Dos dedos extendidos representan la tijera.



Se gana según las siguientes reglas:

- La piedra rompe la tijera.
 - La tijera corta el papel.
 - El papel envuelve a la piedra.
- Dicho en otras palabras, la piedra le gana a la tijera, la tijera le gana al papel y el papel le gana a la piedra.

2. Si dos personas, **A** y **B** juegan a "Piedra, papel y tijera" puede suceder que ambas muestren lo mismo al mismo tiempo, o bien, que no coincidan. Hacé un diagrama arbol para analizar las posibilidades del juego y respondé en tu carpeta las consignas siguientes.

- ¿Cuántos empates pueden producirse?
- ¿En cuántos puede ganar el jugador **A**?
- ¿En cuántos puede ganar el jugador **B**?
- Que gane el jugador **A**, que gane el jugador **B** y que se produzca un empate ¿son sucesos equiprobables? ¿Por qué?

Ahora que ya hiciste algunos experimentos en los que se ponen en juego cálculos de probabilidad, seguí animándote con otros más complicados para profundizar en el tema.

UNIDAD 5

A

3. Otros experimentos



a) Hacé un diagrama arbolar en tu carpeta para analizar los sucesos esperables cuando se arrojan al aire dos monedas al mismo tiempo. Si es posible, para resolver las preguntas, conversá con un compañero.

1. ¿Cuántos son los sucesos posibles?
2. ¿Qué suceso es más probable: una cara y una ceca, dos caras o dos cecas? ¿Por qué?

b) Hacé otro diagrama arbolar para registrar cuando se tiran al aire tres monedas juntas y respondé:

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 cecas?
2. ¿La probabilidad de obtener 3 caras es igual que la de obtener una cara y dos cecas?
3. Si se tratara de tirar una sola moneda, ¿vale la pena hacer un diagrama arbolar?
4. Mostrale tu cuaderno al docente y conversá con él sobre la utilidad de los diagramas de árbol.

c) El cuadro que sigue resume el análisis de los juegos de azar con los que estuviste trabajando. Leelo atentamente, volvé a leer lo que escribiste en tu carpeta y hacé las correcciones que sean necesarias.

Experimentos	Sucesos posibles	Probabilidad
Arrojar una moneda	Cara – ceca Ambos sucesos tienen la misma probabilidad	$P(\text{cara}) = P(\text{ceca}) = \frac{1}{2}$
Arrojar un dado	1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 son sucesos equiprobables	La probabilidad de cada suceso es $\frac{1}{6}$
Arrojar dos dados	La suma puede ser 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 No todos son sucesos equiprobables	La probabilidad de que la suma sea 2 o 12 es $\frac{1}{6}$ 3 u 11 es $\frac{1}{18}$ 4 o 10 es $\frac{1}{12}$ 5 o 9 es $\frac{1}{9}$ 6 u 8 es $\frac{5}{36}$ 7 es $\frac{1}{6}$
“Piedra, papel y tijera”	Gana A , gana B , empate. Son sucesos equiprobables	La probabilidad de cada suceso es $\frac{1}{3}$
Arrojar dos monedas	Cara-cara; Cara-ceca = Ceca-cara; ceca-ceca	$P(\text{cara-cara}) = P(\text{ceca-ceca}) = \frac{1}{4}$ $P(\text{cara-ceca}) = \frac{1}{2}$

Para finalizar

En el desarrollo de esta unidad aprendiste a calcular las probabilidades de éxito en juegos relacionados con el azar. Estás en condiciones de aplicar lo que aprendiste a la revisión de los juegos matemáticos que fuiste armando con tus compañeros. Por ejemplo, podés analizar en “Tomo o pongo”, en la unidad 1, si todos los sucesos posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir.

En sus comienzos, el cálculo matemático de probabilidades estuvo muy vinculado con el estudio de los juegos de azar. Más adelante, su evolución facilitó la inducción científica que permite plantear conclusiones con cierta generalidad sobre un tema de interés, a partir de los registros de hechos y observaciones experimentales, como en el caso de la Estadística. Cuando se dispone de una cantidad importante de información acerca de algún objeto en estudio, la teoría de la probabilidad ayuda a la Estadística y a sus aplicaciones en las ciencias. Esto ocurre por ejemplo cuando se quiere estudiar la propagación de una epidemia, probar un medicamento, calcular la cantidad de agua potable o el número de escuelas necesarias para una población en los próximos años o estimar cuántas semillas deben sembrarse para obtener un determinado número de plantas.

Ahora preparate para enfrentar los desafíos matemáticos de la página siguiente con los que descubrirás casos interesantes de cálculos de probabilidad y de otro tipo de cálculos.



UNIDAD 5

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. El juego del caos

Necesitas un dado, una regla que tenga los números marcados, un lápiz rojo y... mucho tiempo.

Toma una hoja de papel tamaño oficio, o una cartulina o un pliego de papel afiche, y marca tres puntos cualesquiera que no estén alineados, como si fueran los vértices de un triángulo. Indicalos con (1,2), (3,4) y (5,6).



- Elegí arbitrariamente un punto “negro” de partida y arrojá un dado.
- Marcá el punto medio de la distancia que existe entre el punto “negro” de partida y el punto que tenga el número que ha salido en el dado que arrojaste. Este será el nuevo punto “negro” de partida.
- Arrojá el dado de nuevo y repetí el procedimiento para encontrar un nuevo punto “negro”.
- Así otra y otra y otra vez...

Este juego no termina nunca... Jugá cada vez que puedas, invitá a otros chicos para aumentar las tiradas del dado, guardá la hoja de papel para observar qué va ocurriendo a medida que pasa el tiempo y las tiradas del dado.

El diseño resultante es asombroso.