

# UNIDAD 4

## Combinatoria y estrategias de conteo

En esta unidad y la siguiente vas a conocer algunas nociones matemáticas que te permitirán relacionar datos para hacer predicciones sobre diferentes fenómenos.

El tema de esta unidad, la combinatoria, es el estudio de todas las formas en que pueden presentarse los elementos, es decir, las variables que intervienen en un mismo fenómeno, caso o problema. Por ejemplo, cómo hacer para saber de cuántas maneras diferentes se pueden acomodar 8 libros en un estante o cuántas comisiones diferentes de 3 alumnos se pueden formar con 4 niñas y 3 varones si en cada una debe haber por lo menos una niña y un varón son problemas de los que se ocupa la combinatoria.

En esta unidad aprenderás algunas estrategias para contar fácilmente el número de resultados posibles de experimentos como los de los ejemplos, en los que se combinan más de una variable. Para introducirte en el tema, analizarás el caso de una familia que está dispuesta a comenzar un negocio.

### TEMA 1: COMBINACIONES



#### 1. Organizar la información, un primer paso

En esta actividad trabajarás sobre cómo organizar los datos de un problema para obtener las soluciones.



a) Leé con tus compañeros la siguiente situación.

La familia Ocampo ha decidido abrir una casa de comidas sobre la ruta, junto a la estación de servicio. Doña Marcela está haciendo cálculos para ofrecer a los clientes la posibilidad de elegir libremente entre 3 platos fríos como entradas, 4 platos calientes y 3 postres. Todos los miembros de la familia aportan ideas para colaborar con parte del trabajo, atraer clientela y ofrecer un buen servicio.

Don José propone colocar un pizarrón con la oferta de un menú compuesto por un plato frío, uno caliente y un postre a muy bajo precio, y agrega que pueden armarse 7 menús diferentes, uno para cada día de la semana. A los hijos del matrimonio –Leandro, Ariel y Delfina– les parece una buena idea pero creen que pueden armar más de 7 menús diferentes con la misma cantidad de platos.

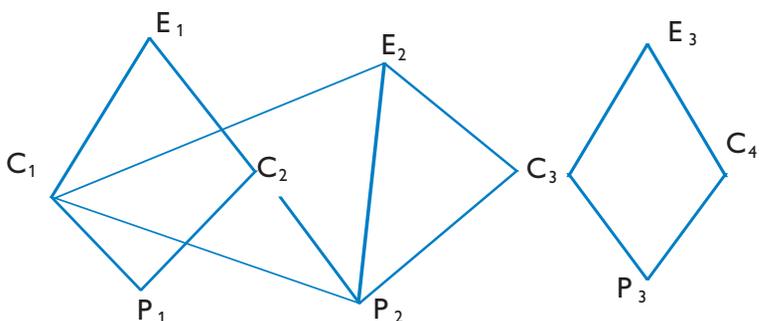
1. Discutan entre ustedes cómo podrían ayudar a los Ocampo en el cálculo de cuántos menús diferentes compuestos por una entrada, un plato caliente y un postre se pueden ofrecer si cuentan con 3 entradas, 4 platos calientes y 3 postres. Escriban las opciones que vayan encontrando.

**UNIDAD 4**

2. Después de haber intercambiado ideas entre ustedes, lean qué hicieron los hermanos Ocampo. Leandro escribió en un papel:

$E_1$                        $E_2$                        $E_3$                        $C_4$   
                           $C_1$                        $C_2$                        $C_3$                        $P_3$   
     $P_1$                        $P_2$

Luego dibujó algunos trazos para ayudarse a buscar las combinaciones posibles:



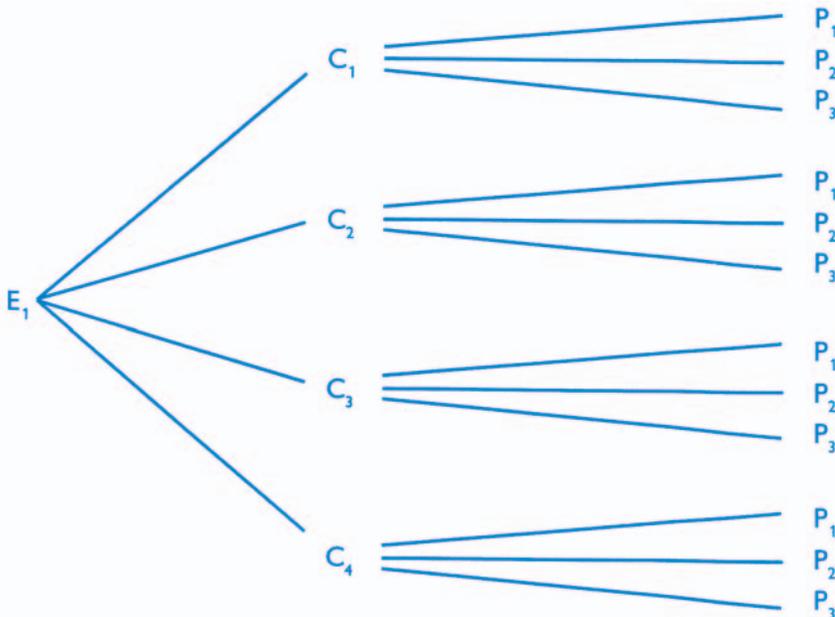
Y dijo: “Esto es muy complicado, pero ¡hay más que siete menús!”.

Ariel propuso: “Es mejor organizar las opciones así”

- |                   |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $E_1$ $C_1$ $P_1$ | $E_1$ $C_2$ $P_1$ | $E_1$ $C_3$ $P_1$ | $E_1$ $C_4$ $P_1$ |
| $E_1$ $C_1$ $P_2$ | $E_1$ $C_2$ $P_2$ | $E_1$ $C_3$ $P_2$ | $E_1$ $C_4$ $P_2$ |
| $E_1$ $C_1$ $P_3$ | $E_1$ $C_2$ $P_3$ | $E_1$ $C_3$ $P_3$ | $E_1$ $C_4$ $P_3$ |



Delfina propuso dibujar un diagrama como este para contar más rápido.



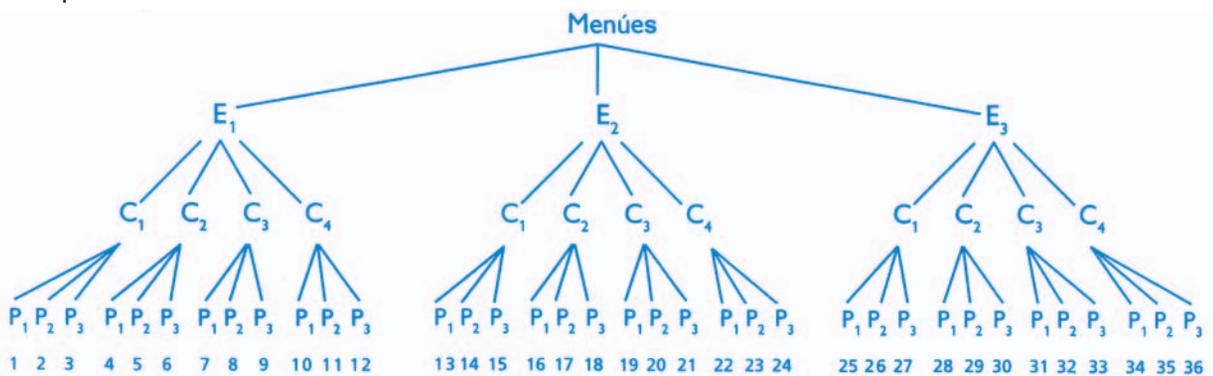
En Matemática, muchas veces es útil representar situaciones haciendo diagramas. Los diagramas son formas de representación mediante esquemas que sirven para organizar una situación matemática, visualizar más fácilmente las relaciones entre sus elementos y facilitar así su resolución.



**b)** Ahora que conocen cómo organizó el problema cada uno de los chicos, ¿qué procedimiento elegirían ustedes para calcular cuántos menús diferentes se pueden formar con 3 entradas, 4 platos y 3 postres? Responda cada uno en su carpeta y entre todos escriban un breve comentario explicando cómo lo resolvieron. Muéstrenselo al docente. ¿Se parece al que discutieran en el apartado 1 de la consigna a?



**c)** Este esquema corresponde a la solución que propuso Delfina. Analícenlo y expliquen el procedimiento que lleva a la solución.



En la actividad siguiente vas a explorar las características de los diagramas del tipo que viste aquí y cómo se pueden obtener fórmulas para calcular combinaciones posibles a partir de ellos. En la unidad 3 ya estuviste trabajando con este tipo de diagramas, los diagramas arbolares.

UNIDAD 4

A

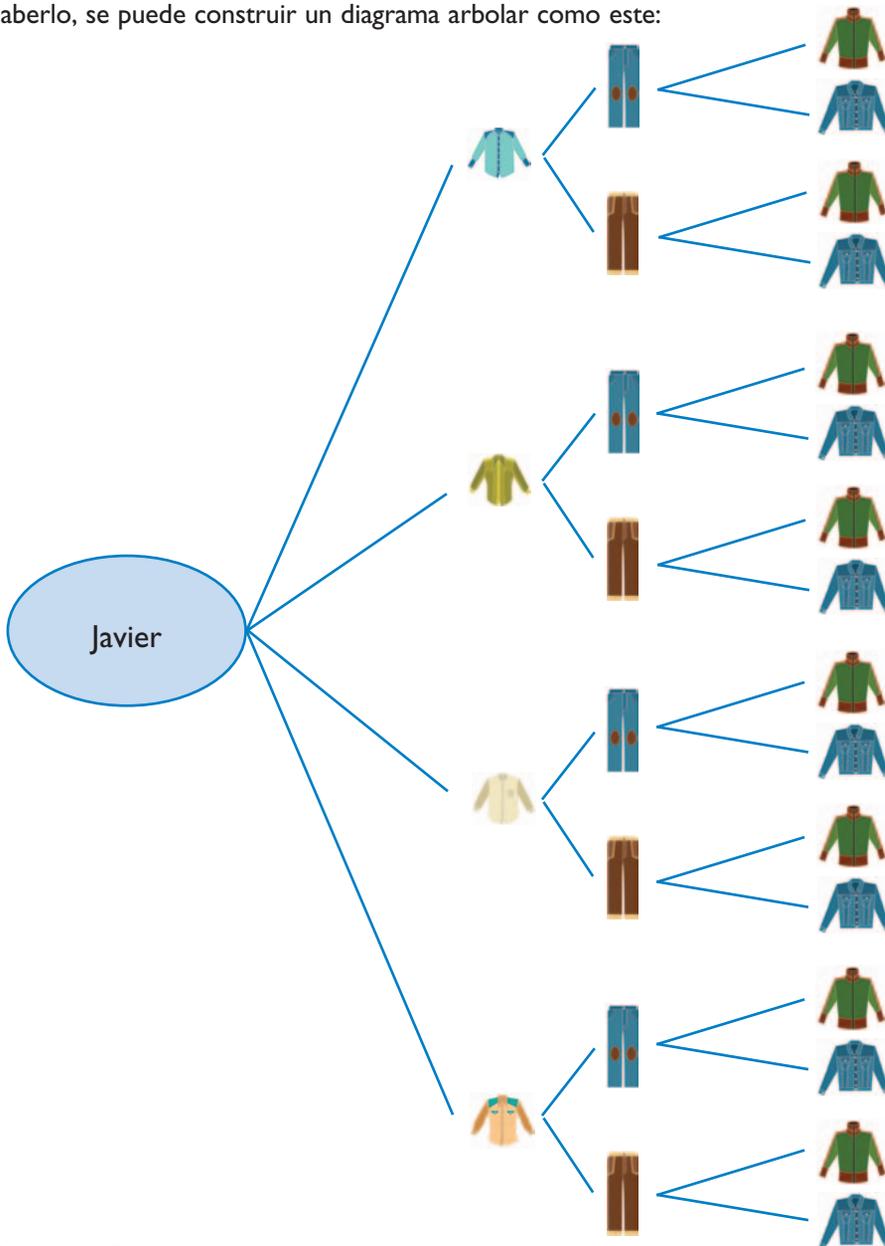
2. Los diagramas arbolares en la combinatoria

Los diagramas arbolares brindan la posibilidad de indicar cómo combinar los elementos de un conjunto con los elementos de otros, sin omitir ni repetir ninguno. Los extremos finales de las ramas permiten contar el número de combinaciones posibles que difieren por lo menos en un elemento.

a) Analizó este otro ejemplo con la ropa de Javier.

Javier tiene 4 camisas, 2 pantalones y 2 camperas ¿De cuántas maneras diferentes se puede vestir?

Para saberlo, se puede construir un diagrama arbol como este:



Ahora, según el diagrama, escribí en números de cuántas maneras diferentes puede vestirse Javier.

b) Resolvé en tu carpeta, dibujando diagramas arbolares, los siguientes problemas.

1. El viaje de la ciudad de Buenos Aires a la de Mar del Plata se puede hacer en avión, en tren o en micro. Cada uno se ofrece en categoría “turista”, “servicio plus” o “servicio ejecutivo”. ¿De cuántas maneras se puede viajar?
2. Para elegir una comisión en la Junta Vecinal se propusieron 4 candidatos para presidente y 2 candidatos para secretario. Ninguna persona se propuso para los dos cargos; ¿de cuántas maneras diferentes puede hacerse la elección?
3. Para ir desde el pueblo Arsenal hasta Robles se pueden tomar 2 caminos diferentes: uno de tierra y otro consolidado. Para ir desde Robles hasta Valdemosa se puede elegir entre 3 carreteras: la costera, la de la loma y la autopista. ¿Cuántos trayectos diferentes se pueden recorrer para ir desde Arsenal hasta Valdemosa pasando por Robles?

c) Compará los diagramas arbolares que hiciste para resolver los problemas anteriores. ¿En qué se parecen? ¿En qué se diferencian?

1. En los diagramas, ¿cómo se puede contar el número total de combinaciones posibles? ¿Cómo se puede calcular ese número?
2. Escribí las respuestas en tu carpeta, comparalas con las de tus compañeros y mostraselas al docente.

En los diagramas arbolares se ve que, para calcular el número de combinaciones posibles entre los elementos de dos o más conjuntos diferentes, tomados en cierto orden, se multiplica el número de elementos del primer conjunto por el número de elementos del segundo conjunto y así sucesivamente.

Por ejemplo, en el caso de Javier, la respuesta es que se puede vestir de 16 maneras diferentes porque:

$$4 \times 2 \times 2 = 16$$

## UNIDAD 4



Si llamamos  $n_1$  al número de maneras diferentes en que se puede hacer una elección, y a continuación se puede realizar otra elección de  $n_2$  maneras distintas, entonces las dos elecciones combinadas dan  $n_1 \cdot n_2$  combinaciones diferentes.

En símbolos:

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = C$  donde  $n_1$  es el número de elementos del primer conjunto,  
 $n_2$  es el número de elementos del segundo,  
 $n_3$  es el número de elementos del tercero  
 y  $C$  es el número de combinaciones posibles.

En estas actividades trabajaste combinando los elementos de distintos conjuntos (entradas - platos - postres:  $3 \cdot 4 \cdot 3$ ) (remeras - pantalones - camperas:  $4 \cdot 2 \cdot 2$ ) (medios de transporte-categorías:  $3 \cdot 3$ ) (candidatos-cargos:  $4 \cdot 2$ ) (camino - carreteras:  $2 \cdot 3$ ) y usaste diagramas arbolares para simplificar el conteo de casos numerosos.

El tema siguiente te va a permitir explorar una estrategia de conteo que se aplica para resolver otro tipo de situaciones.

## TEMA 2: PERMUTACIONES

Cuando lo que se quiere estudiar son los ordenamientos posibles de los elementos de un único conjunto se habla de permutaciones. Por ejemplo, las maneras diferentes en que se pueden distribuir los cargos de presidente, secretario y tesorero entre 3 personas que fueron elegidas para formar una comisión vecinal es un problema de permutaciones. Los diagramas arbolares también ayudan a contar las diferentes maneras en que se pueden presentar esos ordenamientos.



## 3. Cambios en el orden

a) Resolvé en tu carpeta los siguientes problemas y, al concluir, conversá con tus compañeros sobre las formas que encontró cada uno para resolverlos.

1. ¿Cuántos números diferentes de 4 cifras se pueden formar con las cifras 2, 4, 5 y 9? Escribilos todos.
2. Luis, Miguel, Javier y Agustín se van a sentar en un tablón para ver un partido de fútbol entre vecinos. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar?
3. Si resolviste los problemas anteriores dibujando diagramas arbolares, compáralos: ¿en qué se parecen?, ¿en qué se diferencian? Si no usaste diagramas, explicá cómo resolviste los problemas.

b) Lee la siguiente información sobre las maneras de nombrar un triángulo.

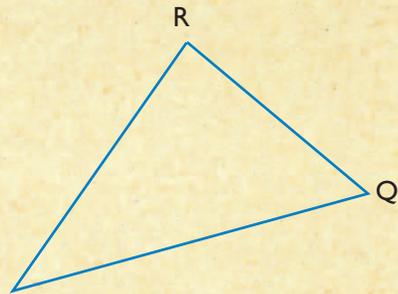
### • • • Triángulos

Para identificar un triángulo se mencionan sus 3 vértices. Se puede comenzar por cualquiera y mencionarlos en diferente orden.

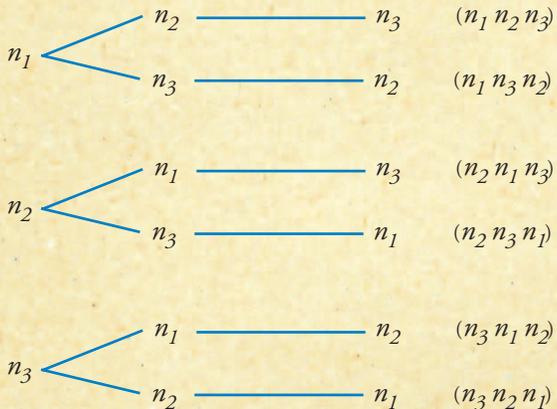
Por ejemplo, comenzando por *P*: *PQR* o bien *PRQ*;  
 comenzando por *Q*: *QPR* o bien *QRP*;  
 comenzando por *R*: *RPQ* o bien *RQP*.

En total hay seis maneras diferentes de nombrar al triángulo.

En el caso de cualquier terna de objetos, por ejemplo, los lados de un triángulo o lanas de tres colores para tejer una bufanda a rayas, si llamamos  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  a los tres elementos, el siguiente diagrama arbolar muestra el número de permutaciones posibles:



Si llamamos  $n$  al número de elementos disponibles, las posibles disposiciones diferentes en las que se toman todos con distinto orden se llaman permutaciones de  $n$  elementos.



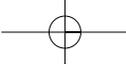
Observando las ramas del gráfico se puede escribir que el número de permutaciones de 3 elementos es  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ .

Para calcular el número de permutaciones de 4 elementos, se multiplica:  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ , y para calcular el número de permutaciones de 5 elementos:  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ .

Cuando se trabaja con  $n$  elementos, dos permutaciones se consideran diferentes si por lo menos dos de los  $n$  elementos están dispuestos en distinto orden.

c) Respondé en tu carpeta:

- Los problemas **1** y **2** de la consigna **a** de esta actividad ¿se pueden resolver mediante el cálculo de permutaciones? Justificá tu respuesta.



## UNIDAD 4

### A

## 4. Combinaciones y permutaciones

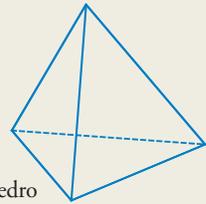


Los problemas que siguen te permitirán aplicar lo que aprendiste en esta unidad. En ellos, el uso de los diagramas arborescentes y la realización de cálculos a partir de las fórmulas estudiadas te facilitará la obtención de las posibles soluciones.

a) Resolvé en tu carpeta los siguientes problemas.

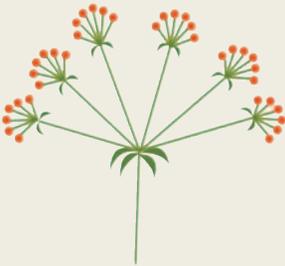
1. Si usás las diez cifras desde el 0 hasta el 9, ¿cuántos números de 3 cifras diferentes se podrían formar? Explicá cómo lo podés calcular y respondé si se podría usar 0 en la cifra de las centenas? ¿Por qué?
2. En cada página de un cuaderno hay 28 renglones. Si en cada renglón escribieras 12 de los números del problema anterior, ¿cuántas páginas de cuaderno necesitás para escribir los 648 números posibles?
3. Ponele letras a los cuatro vértices del tetraedro.

- Nombrá los vértices de la base de todas las formas distintas que sea posible.
- Nombrá al tetraedro de todas las formas distintas que sea posible, sin olvidarte ninguna.



Tetraedro

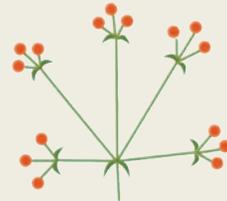
4. Los siguientes esquemas corresponden a especies florales distintas. Representan inflorescencias, es decir, sistemas de ramificación de los tallos que terminan en flores y que son características de cada especie floral. Escribí, en cada caso, el cálculo que permite conocer el número de flores de cada inflorescencia.



Umbela de umbelas



Racimo de racimos

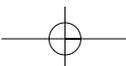


Umbela formada por umbelas más pequeñas

## Para finalizar

En esta unidad, analizaste situaciones en las que se pueden hacer sucesivas elecciones y utilizaste diagramas arborescentes para resolverlas. Esta es una estrategia que te facilita el cálculo del número de combinaciones entre los elementos de diferentes conjuntos y también del número de permutaciones en los elementos de un único conjunto.

Te preguntarás si en alguna profesión hay quienes trabajan con estas estrategias. A propósito, es bueno que sepas que la combinatoria está muy vinculada con el cálculo de probabilidad y estadística que es el estudio de los mejores modos de acumular y organizar la información para poder inferir conclusiones. Y ese es justamente el tema de la próxima unidad.



## DESAFÍOS MATEMÁTICOS

### 1. En la cancha de bochas

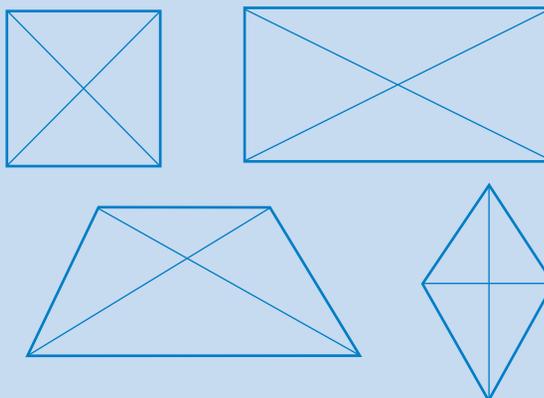
Diez amigos se reúnen a jugar a las bochas. Juegan tres partidos y al final de cada uno anotan en una planilla el nombre del ganador. ¿De cuántas maneras diferentes pudieron completar la planilla?

### 2. Cuadriláteros

a) Analizá qué cuadrilátero se forma según que las diagonales sean:

1. iguales o distintas,
2. se corten o no en el punto medio,
3. se corten o no perpendicularmente.

b) Armá un diagrama arbolar con todas las alternativas. ¿Por qué al recorrer algunas de las ramas se obtienen cuadriláteros del mismo tipo que en otras?



### 3. Números y más

a) ¿Cuántos números mayores que 10 y menores que 100 no tienen cero? ¿Cómo pensás que se puede averiguar?

b) Formá todos los productos posibles de dos números eligiéndolos entre 2, 3, y 5.

1. Sin repetir los factores.
2. Repitiendo factores.
3. ¿Cuál es el producto mayor? ¿Y el menor?

### 4. A ordenar

¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar seis libros en una estantería?



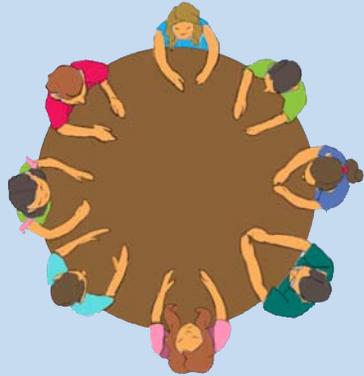
## UNIDAD 4

**5. Los caballeros de la mesa redonda**

Los señores Pérez, Salinas, González y Rizzo y sus esposas compartieron una mesa redonda. Se sentaron de forma que:

- ninguna mujer se sentó junto a su marido,
- no había dos mujeres juntas,
- enfrente de Salinas se sentó Rizzo y,
- a la derecha de la esposa de Salinas, se sentó González.

¿Quién se sentó entre Salinas y Pérez?

**6. Cuadrados en cuadrados**

En un cuadrado se pueden insertar otros cuadrados. De entre ellos, considerará aquellos cuyos vértices son puntos de intersección de las cuadrículas con los lados del cuadrado inicial.

- En un cuadrado como este, ¿cuántos cuadrados con esas condiciones se pueden dibujar?
- ¿Y en cuadrados de  $4 \times 4$ ?, ¿y de  $5 \times 5$ ?, ¿y de  $6 \times 6$ ? Ampliá tu estudio a cuadrados con dimensiones diferentes.

