4

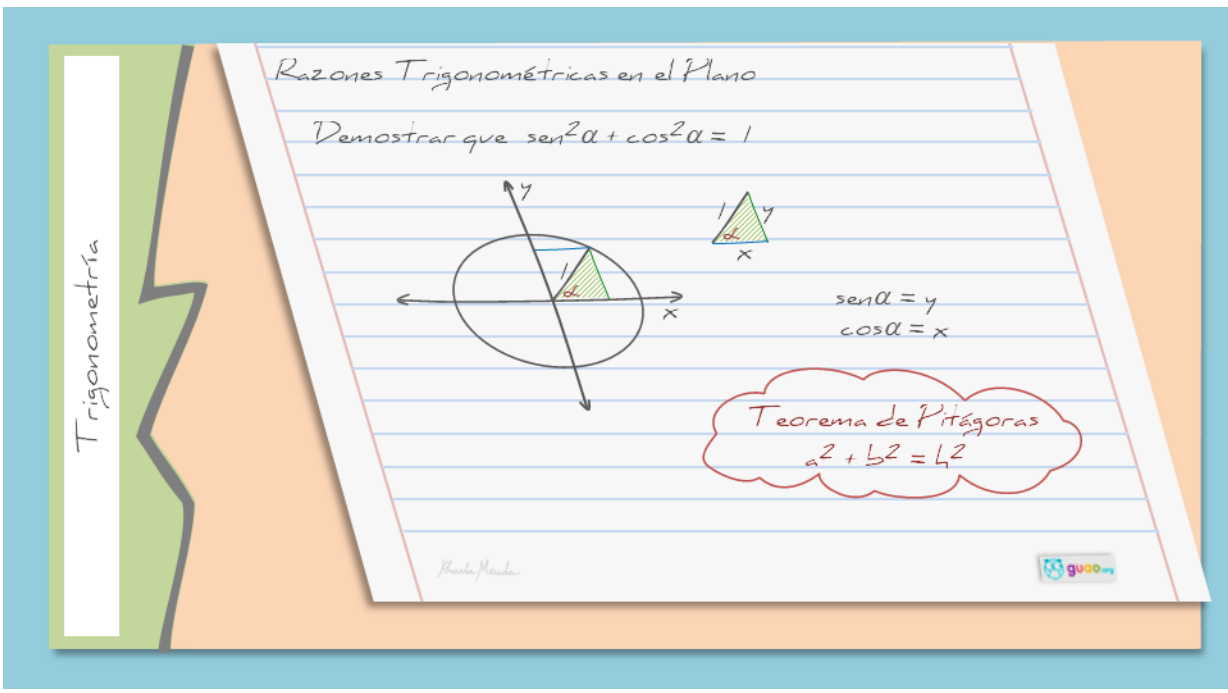
4ta Unidad

Trigonometría

4.2 Razones Trigonométricas en el Plano.

Para hacer realidad los sueños se requiere preparación, voluntad, determinación y disciplina. Alimentar sueños sin acompañarlo de acción es vivir en fantasías sustentadas por el esfuerzo de otros.

Descripción



Este objetivo está enriquecido con varias herramientas aprendidas con anterioridad. Plano cartesiano, proyecciones, teorema de Pitágoras, sustituciones, propiedades de las igualdades, y las definiciones de las razones trigonométricas vistas en el objetivo anterior, entre otras. Aquí deduciremos las identidades trigonométricas básicas con las que construiremos el contenido correspondiente a Trigonometría. Acompáñanos.

Conocimientos Previos Requeridos

Plano Cartesiano, Coordenadas de un Punto, Proyecciones, Teorema de Pitágoras, Despeje.

Contenido

Relaciones Trigonométricas en el Plano, Circulo trigonométrico, Identidad trigonométricas, Relaciones Trigonométricas para Ángulos Notables, Ángulos Negativos, Razones Trigonométricas para Ángulos Mayores.

Videos Disponibles

TRIGONOMETRÍA. Relaciones Trigonométricas. En el Plano, Círculo Trigonométrico, Identidades Trigonométricas. Parte I

TRIGONOMETRÍA. Relaciones Trigonométricas. En el Plano, Círculo Trigonométrico, Identidades Trigonométricas. Parte II

TRIGONOMETRÍA. Relaciones Trigonométricas. Para los Ángulos: 0°, 90°, 180° y 270°. Parte I

TRIGONOMETRÍA. Relaciones Trigonométricas. Para los Ángulos: 0°, 90°, 180° y 270°. Parte II

TRIGONOMETRÍA. Relaciones Trigonométricas. Para Ángulos Notables: 30° y 60°. Parte I

TRIGONOMETRÍA. Relaciones Trigonométricas. Para Ángulos Notables: 30° y 60°. Parte II

TRIGONOMETRÍA. Relaciones Trigonométricas. Para Ángulos Notables: 30° y 60°. Parte III

TRIGONOMETRÍA. Relaciones Trigonométricas. Para el Ángulo: 45°

TRIGONOMETRÍA. Relaciones Trigonométricas. Para Ángulos Negativos y Suplementarios

TRIGONOMETRÍA. Relaciones Trigonométricas. Signos para las RT para Ángulos en el 2do, 3er y 4to Cuadrante

TRIGONOMETRÍA. Razones Trigonométricas. Para Ángulos Mayores de 90°. Parte I

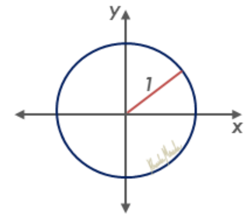
TRIGONOMETRÍA. Razones Trigonométricas. Para Ángulos Mayores de 90°. Parte II

TRIGONOMETRÍA. Razones Trigonométricas. Para Ángulos Mayores de 90°. Parte III

Guiones Didácticos

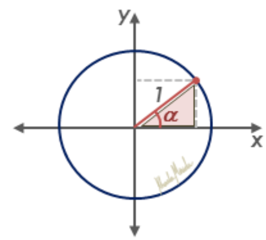
TRIGONOMETRIA. Relaciones Trigonométricas. En el Plano, Circulo Trigonométrico, Identidades Trigonométricas. Parte I

Ubiquemos en el plano una circunferencia de centro en el origen, y radio 1, esta se conoce como «círculo trigonométrico».



Si proyectamos el punto de la circunferencia, correspondiente al radio, hacia los ejes x y y, vemos que se forma un triángulo.

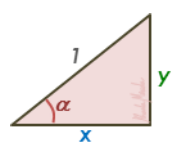
El ángulo que forma el radio con el eje x lo llamaremos alfa.

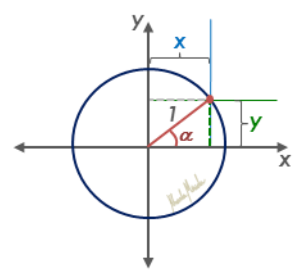


La medida de la proyección al eje x , es un valor de y, y es la medida del cateto opuesto a alfa.

La medida de la proyección al eje y, es un valor de x, y es la medida del cateto adyacente a alfa.

La medida del radio, que es 1, es la medida de la hipotenusa.





Apliquemos las relaciones trigonométricas a este triángulo, específicamente respecto al ángulo alfa.

Relaciones Principales

Para α.

Cateto opuesto, CO: es **y** ; Cateto adyacente, CA: es **x** ; Hipotenusa: **1**

Principales

Seno	Coseno	Tangente
$sen\alpha = \frac{y}{1}$	$cos\alpha = \frac{x}{1}$	$tg\alpha = \frac{y}{x}$

Simplificando los cocientes

$sen\alpha = y$ $\quad$ $cos\alpha = x$

Sustiuimos en la relación de tangente, y por senα y x por cosα

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

Inversas

Cosecante	Secante	Cotangente
$csc\alpha = \frac{1}{y}$	$sec\alpha = \frac{1}{x}$	$ctg\alpha = \frac{x}{y}$

Sustiuimos y por senα y x por cosα

$$csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha} \qquad sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$$

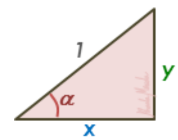
$$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$

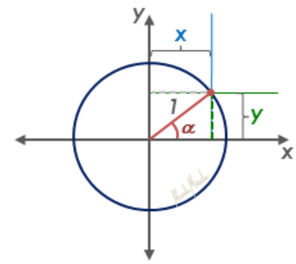
TRIGONOMETRIA. Relaciones Trigonométricas. En el Plano, Circulo Trigonométrico, Identidades Trigonométricas. Parte II

En esta lección vamos a deducir tres identidades trigonométricas de gran importancia.

Para ello aplicaremos el teorema de Pitágoras al triángulo asociado al círculo trigonométrico.

El teorema de Pitágoras dice:
"la suma de los cuadrados de los catetos, es igual al cuadrado de la hipotenusa"





Teorema de Pitágoras

$$x^2 + y^2 = 1^2$$

Sustiuimos:
$x = \cos\alpha$; $y = \operatorname{sen}\alpha$

$$(\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 = 1^2$$

El cuadrado que eleva a $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ puede escribirse sobre el símbolo de seno y coseno respectivamente.

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1^2$$

Esta es una identidad trigonométrica notable y de gran utilidad en los sucesivos estudios de matemática, así como de frecuente aplicación a la física veamos ahora la deducción de dos fórmulas más a partir de esta.

$$\boxed{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1^2}$$

Partiendo de la identidad trigonométrica obtenida.

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1^2$$

Dividimos cada término de la igualdad entre $\cos^2\alpha$.

$$\underbrace{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}_{1} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}_{\operatorname{tg}^2\alpha} = \underbrace{\frac{1}{\cos^2\alpha}}_{\sec^2\alpha}$$

En el 1er término simplificamos, y resulta 1. En el segundo término, $\operatorname{sen}^2\alpha$ entre $\cos^2\alpha$ es $\operatorname{tg}^2\alpha$, basado en que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha}$$

¿Qué sucede si ahora dividimos cada término entre seno cuadrado?

$$\underbrace{\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}}_{\operatorname{ctg}^2\alpha} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}}_{1} = \underbrace{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}}_{\csc^2\alpha}$$

En el 1er término simplificamos, y resulta 1. En el segundo término, $\operatorname{sen}^2\alpha$ entre $\cos^2\alpha$ es $\operatorname{tg}^2\alpha$, basado en que:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha$$

TRIGONOMETRIA. Relaciones Trigonométricas. Para los Ángulos: 0°, 90°, 180° y 270°. Parte I

En las lecciones anteriores, conocimos las relaciones trigonométricas y las identidades ahora conoceremos el valor de cada una de ellas para los ángulos 0, 90, 180 y 360.

Relaciones Trigonométricas

$$csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha} \qquad sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$

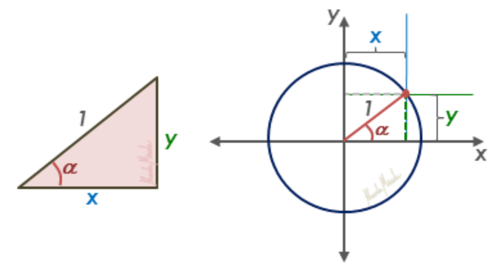
Identidades Trigonométricas

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1^2$$

$$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha$$

$$1 + ctg^2\alpha = csc^2\alpha$$

Recordemos. Al ubicar el círculo trigonométrico ubicado en el plano, obtuvimos la equivalencia entre las relaciones trigonométricas y las proyecciones del radio sobre los ejes x y y.



coseno de alfa, $cos\alpha$: es el valor de la proyección del punto extremo del radio en el eje x.

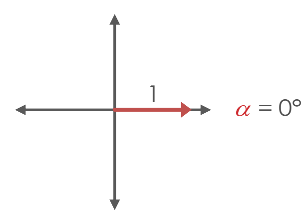
seno de alfa, $sen\alpha$: es el valor de la proyección del punto extremo del radio en el eje y.

$$cos\alpha = x$$

$$sen\alpha = x$$

Ahora Consideremos el plano cartesiano, y un radio de medida la unidad.

Lo haremos girar partiendo de $\alpha = 0°$, veamos qué valores tiene cada relación trigonométrica en este caso.



Relaciones Principales

Coseno de alfa, $cos0°$**.** Es igual a la medida de la proyección del radio sobre el eje x.

El radio está totalmente sobre el eje x, entonces sobre el eje x se ubica la totalidad de su medida, x = 1.

Si x = 1 $\Rightarrow$ cos0° = 1.

$$cos0° = 1$$

Seno de alfa, $sen0°$**.** Es igual a la medida de la proyección del radio sobre el eje y, $sen\alpha = y$.

El radio está totalmente sobre el eje x, entonces sobre el eje y se proyecta solo un punto de medida cero, y = 0.

Si y = 0 $\Rightarrow$ sen0° = 0.

$$sen0° = 0$$

Tangente de alfa, $tg0°$. Es el cociente entre $sen0°$ y $cos0°$.

$$tg0° = \frac{sen0°}{cos0°} = \frac{0}{1}$$

$$\boxed{tg0° = 0}$$

Relaciones Inversas

Cotangente de alfa, $tg0°$**.** Es el cociente entre $cos0°$ y $sen0°$.

La división entre cero no existe, este cociente se simboliza con infinito, que representa una cantidad inmensamente grande.

$$ctg0° = \frac{cos0°}{sen0°}$$

$$ctg0° = \frac{1}{0}$$

$$\boxed{ctg0° = \infty}$$

Secante de alfa, $sec0°$**.** Es el inverso del $cos0°$.

Sabemos que $cos0° = 1$.

$$sec0° = \frac{1}{cos0°}$$

$$sec0° = \frac{1}{1}$$

$$\boxed{sec0° = 1}$$

Cosecante de alfa, $csc0°$**.** Es el inverso del $sen0°$.

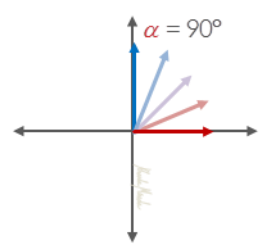
La división entre cero no existe, este cociente se simboliza con infinito, que representa una cantidad inmensamente grande.

$$csc0° = \frac{1}{sen0°}$$

$$csc0° = \frac{1}{0}$$

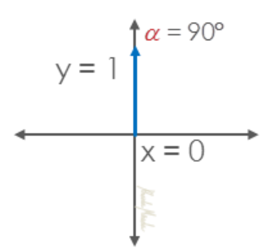
$$\boxed{csc0° = \infty}$$

Giremos el radio hasta llegar a la posición vertical, donde $\alpha = 90°$.



¿cual es la proyección de este radio sobre el eje x y eje y?

Sobre el eje x. La proyección es un punto, entonces su medida es cero, $x = 0$.
Sobre el eje y. La proyección es la medida total del radio, que es 1, $y = 1$.



Sabemos que: $\cos\alpha = x \;,\; \text{sen}\alpha = y \;,\; tg\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$$x = 0 \;,\; y = 1$$

$$\cos 90° = 0 \;,\; \text{sen}90° = 1 \;,\; tg90° = \infty$$

TRIGONOMETRIA. Relaciones Trigonométricas. Para los Ángulos: 0°, 90°, 180° y 270°. Parte II

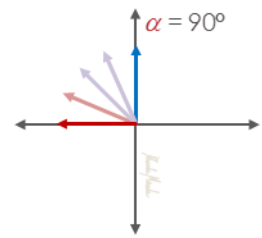
En la lección anterior vimos cómo deducir los valores de las relaciones trigonométricas para $\alpha = 0°$ y $\alpha = 90°$.

$\cos 0° = 1$ $\quad$ $ctg 0° = \infty$ $\quad$ $\cos 90° = 0$ $\quad$ $ctg 90° = 0$

$sen 0° = 0$ $\quad$ $\sec 0° = 1$ $\quad$ $sen 90° = 1$ $\quad$ $\sec 90° = \infty$

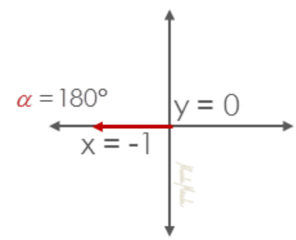
$tg 0° = 0$ $\quad$ $\csc 0° = \infty$ $\quad$ $tg 90° = \infty$ $\quad$ $\csc 90° = 1$

Vamos a continuar con alfa igual a 180° y 270°. Giremos el radio hasta llevarlo a posición horizontal totalmente sobre el eje x, pero del lado negativo y con sentido negativo.



El radio está totalmente sobre la parte negativa del eje x, entonces:

- Sobre el eje x el extremo del radio cae en x = -1.
- sobre el eje y se proyecta un punto de medida cero, y = 0.



Coseno de alfa, *cos180°*. Es igual a la medida de la proyección del radio sobre el eje x.

$$\text{Si } x = -1 \Rightarrow \cos 180° = -1.$$

$\cos 180° = -1$

Seno de alfa, *sen180°*. Es igual a la medida de la proyección del radio sobre el eje y.

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow sen 180° = 0.$$

$sen 180° = 0$

Tangente de alfa, *tg180°*. Es el cociente entre *sen180°* y *cos180°*.

$tg 180° = 0$

Relaciones Inversas

Cotangente de alfa, *tg0°*. Es el cociente entre *cos0°* y *sen0°*.

$ctg 180° = \infty$

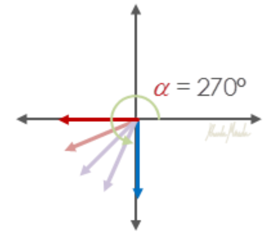
Secante de alfa, *sec0°*. Es el inverso del *cos0°*.

$\sec 180° = -1$

Cosecante de alfa, *csc0°*. Es el inverso del *sen0°*.

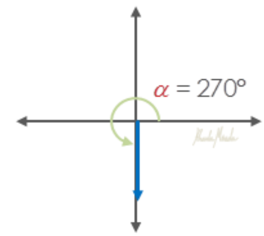
$\csc 180° = \infty$

Giremos el radio hasta llevarlo a posición vertical y con sentido hacia abajo. Totalmente sobre el eje y, pero del lado negativo y con sentido negativo.



El radio está totalmente sobre la parte negativa del eje y, entonces:

- Sobre el eje x se proyecta un punto de medida cero, x = 0.
- sobre el eje y el extremo del radio cae en y = -1.



Coseno de alfa, *cos270°*. Es igual a la medida de la proyección del radio sobre el eje x.

Si x = 0 $\Rightarrow$ cos270° = 0

cos270° = 0

Seno de alfa, *sen270°*. Es igual a la medida de la proyección del radio sobre el eje y.

Si y = -1 $\Rightarrow$ sen270° = -1

sen270° = -1

Tangente de alfa, *tg270°*. Es el cociente entre *sen270°* y *cos270°*.

tg270° = ∞

Relaciones Inversas

Cotangente de alfa, *tg270°*. Es el cociente entre *cos270°* y *sen270°*.

ctg270° = 0

Secante de alfa, *sec270°*. Es el inverso del *cos270°*.

sec270° = ∞

Cosecante de alfa, *csc270°*. Es el inverso del *sen270°*.

csc270° = -1

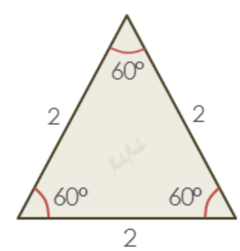
TRIGONOMETRIA. Relaciones Trigonométricas. Para Ángulos Notables: 30° y 60°. Parte I

En la lección anterior vimos los valores de las razones trigonométricas para los ángulos 0°, 90°, 180° y 270°.

α	0°	90°	180°	270°
sen α	0	1	0	-1
cos α	1	0	-1	0
tg α	0	∞	0	∞

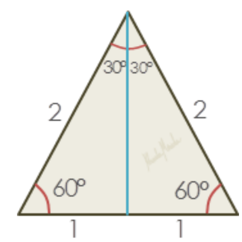
Ahora vamos a deducir los valores de las razones trigonométricas para 30° y 60°.

Triángulo equilátero



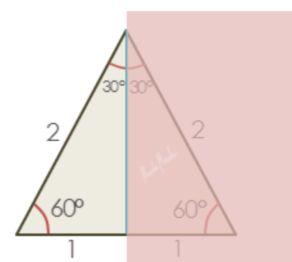
Partiremos de un triangulo equilátero de 2 unidades de lado.

Recordemos. los ángulos internos de un triangulo equilátero son iguales, e iguales a 60°.

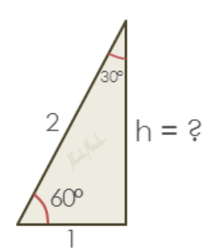


Trazamos la ***mediana*** que va del vértice superior al punto medio de la base en el triangulo equilátero.

La ***mediana*** divide el ángulo en dos ángulos iguales, y el lado correspondiente en dos segmentos de igual medida, 1.



Se han generado dos triángulos rectángulos iguales. Descartaremos una mitad del triángulo equilátero, y nos quedaremos con uno de los triángulos rectángulos.



Conocemos la hipotenusa del triángulo, h = 2, el cateto menor, $c_1 = 1$, que es la base. Nos falta conocer el cateto mayor, que es la altura.

¿Cómo hacemos para conocer la altura?.

Recordemos. Teorema de Pitágoras, aplica a los triángulos rectángulos y dice:
"la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"

Teorema de Pitágoras

$$\underbrace{C_1}_{1}{}^2 + \underbrace{C_2}_{h}{}^2 = \underbrace{H}_{2}{}^2$$

En este triángulo un cateto vale 1, el otro cateto es la altura, h, y la hipotenusa vale 2.

¿Cuál es la incógnita en esta ecuación?

La incógnita es h, que se encuentra en el primer lado de la igualdad elevada al cuadrado.

$$1^2 + h^2 = 2^2$$

Ajustemos un poco la ecuación

Efectuamos las potencias numéricas.

$$1 + h^2 = 4$$

Pasamos 1 restando al 2do lado de la igualdad.

$$h^2 = 4 - 1$$

$$h^2 = 3$$

¿Qué hacemos para eliminar el cuadrado que tiene la h?

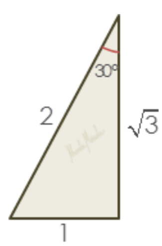
En tercer año aprendimos a resolver ecuaciones de segundo grado. Para eliminar el cuadrado aplicamos raíz cuadrada del otro lado.

$$h = \sqrt{3}$$

Ya tenemos listo el triángulo que nos permitirá deducir los valores de las razones trigonométricas de 30° y 60°. Avancemos a la próxima lección para hallarlos.

TRIGONOMETRIA. Relaciones Trigonométricas. Para Ángulos Notables: 30° y 60°. Parte II

Para $\alpha = 30°$



Cateto Adyacente: $\sqrt{3}$
Cateto opuesto: 1
Hipotenusa: 2

$$sen30° = \frac{CO}{H} \qquad sen30° = \frac{1}{2}$$

$$cos30° = \frac{CA}{H} \qquad cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg30° = \frac{CO}{CA} \qquad tg30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Racionalizamos. $tg30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$ctg30° = \frac{CA}{CO} \qquad ctg30° = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

Simplificamos $ctg30° = \sqrt{3}$

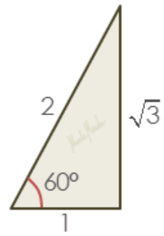
$$sec30° = \frac{H}{CA} \qquad sec30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Racionalizamos. $sec30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$csc30° = \frac{H}{CO} \qquad csc30° = 2$$

TRIGONOMETRIA. Relaciones Trigonométricas. Para Ángulos Notables: 30° y 60°. Parte III

Para $\alpha = 60°$



Cateto Adyacente: 1
Cateto opuesto: $\sqrt{3}$
Hipotenusa: 2

$sen60° = \frac{CO}{H}$ $\quad$ $sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos60° = \frac{CA}{H}$ $\quad$ $cos60° = \frac{1}{2}$

$tg60° = \frac{CO}{CA}$ $\quad$ $tg60° = \frac{\sqrt{3}}{1}$

Simplificamos $\quad$ $tg60° = \sqrt{3}$

$ctg60° = \frac{CA}{CO}$ $\quad$ $ctg60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Racionalizamos. $\quad$ $ctg60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$sec60° = \frac{H}{CA}$ $\quad$ $sec60° = \frac{2}{1}$

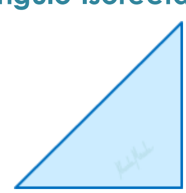
$csc60° = \frac{H}{CO}$ $\quad$ $csc60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Racionalizamos. $\quad$ $ctg60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Vamos a preparar el triángulo para deducir los valores de las razones trigonométricas para $\alpha = 45°$.

TRIGONOMETRIA. Relaciones Trigonométricas. Para el Ángulo: 45°

Triángulo Isorectángulo



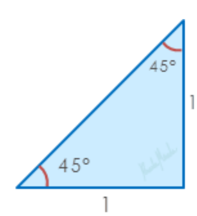
Para obtener los valores de las razones trigonométricas para $\alpha = 45°$ utilizaremos un triángulo isorectangulo.

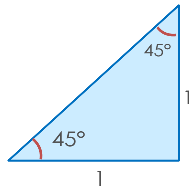
Recordemos. Triángulo isorectangulo es un triángulo isósceles y rectángulo.

Nota: para repasar visitar la sección de geometría de segundo año, lección correspondiente a tipos de triángulos y sus elementos.

Por ser isósceles tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales, de medida 45°.

Daremos a los lados iguales el valor 1. Debemos calcular el valor de la hipotenusa, utilizando el teorema de Pitágoras.





Teorema de Pitágoras

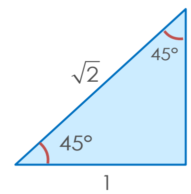
$$c_1^{\,2} + c_2^{\,2} = h^2$$

Sustituyendo el valor de los catetos, $c_1 = c_2 = 1$. $\qquad 1^2 + 1^2 = h^2$

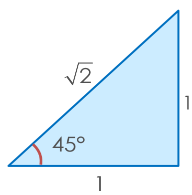
efectuando las potencias, la suma y propiedad simétrica de la igualdad. $\qquad h^2 = 2$

Aplicamos raíz cuadrada para despejar h. $\qquad h = \sqrt{2}$

El triángulo necesario para calcular los valores de las razones trigonométricas para 45° está listo. Hallemos los valores de seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante.



Para $\alpha = 45°$



Cateto Adyacente: 1
Cateto opuesto: 1
Hipotenusa: $\sqrt{2}$

$sen45° = \dfrac{CO}{H} \qquad sen45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$cos45° = \dfrac{CA}{H} \qquad cos45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Racionalizamos.

$sen45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg45° = \dfrac{CO}{CA} \qquad tg45° = \dfrac{1}{1}$

Simplificamos $\qquad tg45° = 1$

$ctg45° = \dfrac{CA}{CO} \qquad ctg45° = \dfrac{1}{1}$

Simplificamos $\qquad ctg45° = 1$

$sec45° = \dfrac{H}{CA} \qquad sec45° = \dfrac{\sqrt{2}}{1}$

$csc45° = \dfrac{H}{CO} \qquad csc45° = \dfrac{\sqrt{2}}{1}$

Simplificamos $\qquad sec45° = \sqrt{2} \quad csc45° = \sqrt{2}$

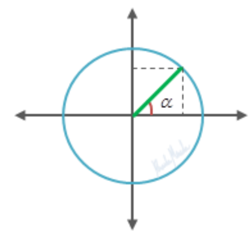
TRIGONOMETRIA. Relaciones Trigonométricas. Para Ángulos Negativos y Suplementario.

Hasta ahora hemos conocido los valores de las razones trigonométricas para ángulos notables positivos.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\operatorname{sen}\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	∞

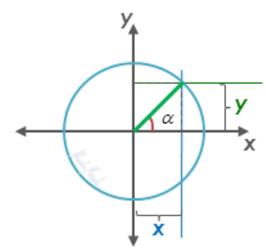
¿Qué sucede si necesitamos saber el valor de alguna razón trigonométrica para un ángulo negativo?.

1ro. Partimos del plano cartesiano con el círculo trigonométrico representado en ella.
2do. Ubicamos un **radio 1** en el 1er cuadrante, y representemos el **ángulo**, α, que forma con el eje x positivo.
3ro. Proyectamos el punto correspondiente al extremo del radio hacia los ejes.

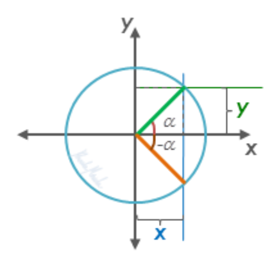


Sabemos que la proyección en el eje x es el valor del $\cos\alpha$, y la proyección en el eje y es el valor del $\operatorname{sen}\alpha$.

$$\mathbf{x} = \cos\alpha \quad , \quad \mathbf{y} = \operatorname{sen}\alpha.$$

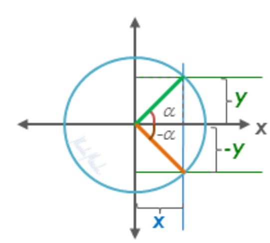


Ahora, trazamos **radio 2** en el cuarto cuadrante, formando el mismo **ángulo** con el eje x, pero negativo, por medirse girando en el sentido de las agujas del reloj.



Sabemos que la proyección de **radio 2** sobre el eje x es el valor del $\cos(-\alpha)$, y la proyección en el eje y es el valor del $\operatorname{sen}(-\alpha)$.

$$\mathbf{x} = \cos(-\alpha) \quad , \quad \mathbf{-y} = \operatorname{sen}(-\alpha).$$



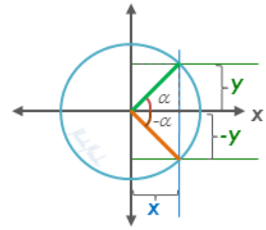
Observamos.
La proyección de **radio 2** sobre el eje x es **x**,
La proyección de **radio 1** sobre el eje x es **x**.

Si las proyecciones son iguales, los cosenos son iguales. Entonces:

coseno de menos alfa es igual a coseno de alfa.

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

Proyección de **radio 1** sobre eje y:
y = senα
Proyección de **radio 2** sobre eje y:
-y = sen(-α)



Observamos.
La proyección de **radio 2** sobre el eje y es **-y**,
La proyección de **radio 1** sobre el eje y es **y**.

$\text{sen}(-\alpha) = -y$
$\text{sen}\alpha = y$

Sustituimos **y**
$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$

Si las proyecciones son opuestas (signos contrarios), entonces:
seno de menos alfa es igual a menos seno de alfa.

Seno y Coseno de ángulos suplementarios

Recordemos. Dos ángulos son suplementarios cuando la suma de ellos da 180°.
Si $\alpha + \beta = 180°$, α y β son suplementarios

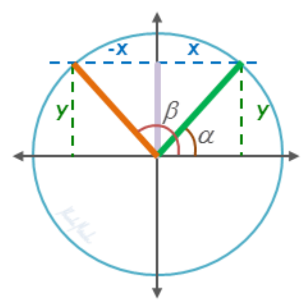
Para repasar este contenido puedes visitar el objetivo de Matemática de 2do Año, 3er Lapso.

Despejando β: $\beta = 180° - \alpha$

En el plano cartesiano, si alfa está en el 1er cuadrante, beta (su suplemento) está en el 2do cuadrante.

Proyectamos los extremos de los radios hacia los ejes x, y tenemos:

Proyección de **radio 1** sobre eje y: **y** = senα
Proyección de **radio 2** sobre eje y: **y** = senβ



Observamos.
Las proyecciones sobre el eje y son iguales.

Si las proyecciones son iguales, entonces:
seno de un ángulo es igual a seno de su suplemento.

$\text{sen}\alpha = \text{sen}\beta$

Proyección de **radio 1** sobre eje x: **x** = cosα
Proyección de **radio 2** sobre eje x: **-x** = cosβ

Observamos.
La proyección de **radio 1** sobre el eje x es **x**,
La proyección de **radio 2** sobre el eje x es **–x**.

$\cos\beta = -x$
$\cos\alpha = x$

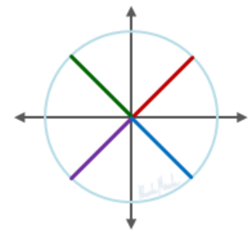
Sustituimos **x**
$\cos\beta = -\cos\alpha$

Si las proyecciones son opuestas (signos contrarios), entonces:
coseno de beta es igual a menos coseno de alfa.

TRIGONOMETRIA. Relaciones Trigonométricas. Signos para la RT para Ángulos en el 2do, 3er y 4to Cuadrante

Hemos conocido hasta ahora, el valor de las razones trigonométricas para 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, y 270°. También la relación entre el seno y coseno de un ángulo, y el seno y coseno del ángulo opuesto. Y la relación entre el seno y coseno de un ángulo y el seno y coseno del suplemento.

Signo de cada razón trigonométrica para cada cuadrante

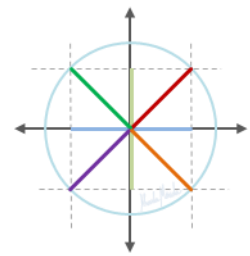


Representamos el plano cartesiano con el círculo trigonométrico centrado en el origen, y un radio en cada cuadrante.

Recordemos.
$\cos\alpha$ es la proyección sobre el eje x, y $\text{sen}\,\alpha$ es la proyección sobre el eje y.

$\cos\alpha = x$

$\text{sen}\,\alpha = y$



Veamos el signo de las proyecciones sobre los ejes para cada cuadrante.

1er cuadrante, I_c.

La proyección en x es positiva, entonces el coseno es positivo.

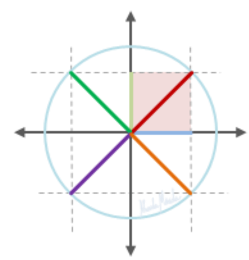
$x \rightarrow +$

$\cos\alpha \rightarrow +$

La proyección en y es positiva, entonces el seno es positivo.

$y \rightarrow +$

$\text{sen}\,\alpha \rightarrow +$



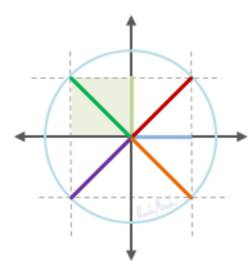
La tangente es seno sobre coseno. El seno es positivo, y el coseno es positivo, el cociente de signos iguales queda positivo. Tangente es positiva.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{+}{+}$$

$\text{tg}\,\alpha \rightarrow +$

1er cuadrante, I_c.

$\cos\alpha \rightarrow +$ $\quad$ $\text{sen}\,\alpha \rightarrow +$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha \rightarrow +$



2do cuadrante, II_c.

La proyección en x es negativa, entonces el coseno es negativa.

$x \rightarrow -$

$\cos\alpha \rightarrow -$

La proyección en y es positiva, entonces el seno es positivo.

$y \rightarrow +$

$\text{sen}\,\alpha \rightarrow +$

La tangente es seno sobre coseno. El seno es positivo, y el coseno es negativo, el cociente de signos diferentes queda negativo. Tangente es negativo.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{+}{-}$$

$\text{tg}\,\alpha \rightarrow -$

2do cuadrante, II_c.

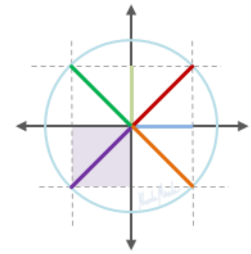
$\cos\alpha \rightarrow -$ $\quad$ $\text{sen}\,\alpha \rightarrow +$ $\quad$ $\text{tg}\,\alpha \rightarrow -$

3er cuadrante, *III*$_c$.

La proyección en x es negativa, entonces el coseno es negativa.

$x \rightarrow -$

$\cos\alpha \rightarrow -$



La proyección en y es negativa, entonces el seno es negativo.

$y \rightarrow -$

$\operatorname{sen}\alpha \rightarrow -$

La tangente es seno sobre coseno. El seno es positivo, y el coseno es negativo, el cociente de signos diferentes queda negativo. Tangente es negativo.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-}{-} \qquad \operatorname{tg}\alpha \rightarrow +$$

3er cuadrante, *III*$_c$.

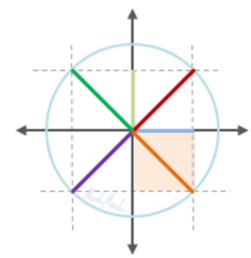
$\cos\alpha \rightarrow -$ $\quad$ $\operatorname{sen}\alpha \rightarrow -$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha \rightarrow +$

4to cuadrante, *IV*$_c$.

La proyección en x es positiva, entonces el coseno es positiva.

$x \rightarrow +$

$\cos\alpha \rightarrow +$



La proyección en y es negativa, entonces el seno es negativo.

$y \rightarrow -$

$\operatorname{sen}\alpha \rightarrow -$

La tangente es seno sobre coseno. El seno es positivo, y el coseno es negativo, el cociente de signos diferentes queda negativo. Tangente es negativo.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-}{+} \qquad \operatorname{tg}\alpha \rightarrow -$$

4to cuadrante, *IV*$_c$.

$\cos\alpha \rightarrow +$ $\quad$ $\operatorname{sen}\alpha \rightarrow -$ $\quad$ $\operatorname{tg}\alpha \rightarrow +$

Signos de las razones trigonométricas por cuadrante

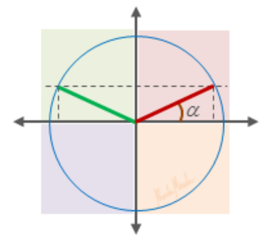
	Ic	*IIc*	*IIIc*	*IVc*
senα	+	+	−	−
cosα	+	−	−	+
tgα	+	−	+	−

TRIGONOMETRIA. Razones Trigonométricas. Para Ángulos Mayores de 90°. Parte I

Hemos conocido hasta ahora, la relación entre los valores de las razones trigonométricas para ángulos positivos y negativos, también hemos conocido los signos de las razones trigonométricas para ángulos en el 2do, 3ro y 4to cuadrante.

Ahora vamos a obtener los valores de las razones trigonométricas para ángulos que se encuentran en el 2do, 3ro y 4to cuadrante. Acompáñanos.

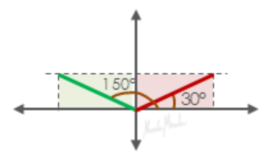
Relación entre los ángulos notables del IIc, IIIc, y IVc, con los notables del Ic.



1 Buscamos pares de ángulos que tengan proyecciones de igual medida en los ejes.

Ejemplo

30° y 150° son ángulos suplementarios, tienen proyecciones en los ejes (*eje x* y *eje y*) de igual medida. La diferencia está en los signos.



En lecciones anteriores obtuvimos los valores de las relaciones trigonométricas para 30°.

El valor absoluto de las razones trigonométricas para 150° son iguales a sus correspondientes para 30°. Los signos de cada razón, para cada cuadrante, están representados en el cuadro de la lección anterior

Para 30°

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \csc 30^\circ = 2$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$$

150° pertenece a *IIc*

	Ic	*IIc*	*IIIc*	*IVc*
senα	+	+	−	−
cosα	+	−	−	+
tgα	+	−	+	−

Para obtener los valores de las razones trigonométricas para 150°, combinamos los valores de las razones trigonométricas para 30°, con los signos que tienen en el ***IIc***.

Para 150°

$$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 150^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

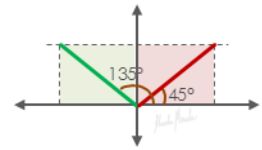
$$\operatorname{sen} 150^\circ = \frac{1}{2} \qquad \csc 150^\circ = 2$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{ctg} 150^\circ = -\sqrt{3}$$

Observamos. En II_c coseno y su inversa son negativos, seno y su inversa son positivos, tangente y su inversa son negativos.

45° y 135° son ángulos suplementarios, tienen proyecciones en los ejes (*eje* x y *eje* y) de igual medida. La diferencia está en los signos.

En lecciones anteriores obtuvimos los valores de las relaciones trigonométricas para 45°.



El valor absoluto de las razones trigonométricas para 135° son iguales a sus correspondientes para 45°. Los signos de cada razón, para cada cuadrante, están representados en el cuadro de signos.

Para 45°

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sec 45° = \sqrt{2}$

$\text{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\csc 45° = \sqrt{2}$

$\text{tg} 45° = 1$ $\text{ctg} 45° = 1$

135° pertenece a *IIc*

	Ic	*IIc*	*IIIc*	*IVc*
senα	+	+	−	−
cosα	+	−	−	+
tgα	+	−	+	−

Para 135°

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sec 135° = -\sqrt{2}$

$\text{sen} 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\csc 135° = \sqrt{2}$

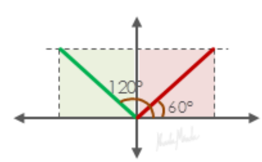
$\text{tg} 135° = -1$ $\text{ctg} 135° = -1$

Para obtener los valores de las razones trigonométricas para 135°, combinamos los valores de las razones trigonométricas para 45°, con los signos que tienen en el ***IIc***.

Observamos. En II_c coseno y su inversa son negativos, seno y su inversa son positivos, tangente y su inversa son negativos.

60° y 120° son ángulos suplementarios, tienen proyecciones en los ejes (*eje* x y *eje* y) de igual medida. La diferencia está en los signos.

Conocemos los valores de las razones trigonométricas para 60°.



El valor absoluto de las razones trigonométricas para 120° son iguales a sus correspondientes para 60°. Los signos de cada razón, para cada cuadrante, están representados en el cuadro de signos.

Para 60°

$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\sec 60° = 2$
$\text{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\text{tg} 60° = \sqrt{3}$	$\text{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

120° pertenece a *IIc*

	IIc
$\text{sen}\alpha$	+
$\cos\alpha$	−
$\text{tg}\alpha$	−

Para 120°

$\cos 60° = -\frac{1}{2}$	$\sec 60° = -2$
$\text{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\text{tg} 60° = -\sqrt{3}$	$\text{ctg} 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

TRIGONOMETRIA. Razones Trigonométricas. Para Ángulos Mayores de 90°. Parte II

En la lección anterior obtuvimos los valores de las razones trigonométricas para ángulos notables que se encuentran en II_c. En esta lección obtendremos los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables del III_c.

Para 120°

$\cos 120° = -\frac{1}{2}$	$\sec 120° = -2$
$\text{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\csc 120° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\text{tg} 120° = -\sqrt{3}$	$\text{ctg} 120° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

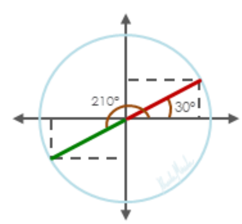
Para 135°

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sec 135° = -\sqrt{2}$
$\text{sen} 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\csc 135° = \sqrt{2}$
$\text{tg} 135° = -1$	$\text{ctg} 135° = -1$

Para 150°

$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sec 150° = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\text{sen} 150° = \frac{1}{2}$	$\csc 150° = 2$
$\text{tg} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{ctg} 150° = -\sqrt{3}$

Para el ángulo 210° y 30° se tienen proyecciones en los ejes (eje x y eje y) de igual medida, diferenciándose en los signos.



Entonces los valores absolutos de cada una de las razones trigonométricas para 210, son los valores de cada una de las razones trigonométricas para 30.

Para 30°

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\text{sen} 30° = \frac{1}{2}$	$\csc 30° = 2$
$\text{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{ctg} 30° = \sqrt{3}$

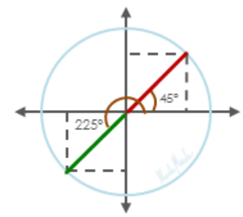
210° pertenece a *IIIc*

	IIIc
$\text{sen}\alpha$	−
$\cos\alpha$	−
$\text{tg}\alpha$	+

Para 210°

$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sec 210° = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\text{sen} 210° = \frac{1}{2}$	$\csc 210° = 2$
$\text{tg} 210° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{ctg} 210° = -\sqrt{3}$

Para el ángulo 225° y 45° se tienen proyecciones en los ejes (eje x y eje y) de igual medida, diferenciándose en los signos.



Entonces los valores absolutos de cada una de las razones trigonométricas para 225°, son los valores de cada una de las razones trigonométricas para 45°.

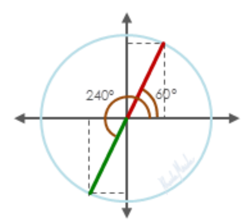
Para 45°	
$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$
$\text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\csc 45° = \sqrt{2}$
$\text{tg}\,45° = 1$	$\text{ctg}\,45° = 1$

225° pertenece a *IIIc*

	IIIc
senα	−
cosα	−
tgα	+

Para 225°	
$\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sec 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{sen}\,225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\csc 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\text{tg}\,225° = 1$	$\text{ctg}\,225° = 1$

Para el ángulo 240° y 60° se tienen proyecciones en los ejes (eje x y eje y) de igual medida, diferenciándose en los signos.



Entonces los valores absolutos de cada una de las razones trigonométricas para 240°, son los valores de cada una de las razones trigonométricas para 60°.

Para 60°	
$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\sec 60° = 2$
$\text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\text{tg}\,60° = \sqrt{3}$	$\text{ctg}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

240° pertenece a *IIIc*

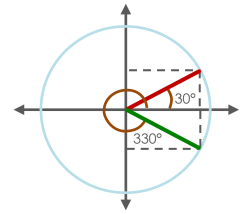
	IIIc
senα	−
cosα	−
tgα	+

Para 240°	
$\cos 240° = -\frac{1}{2}$	$\sec 240° = -2$
$\text{sen}\,240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\csc 240° = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\text{tg}\,240° = \sqrt{3}$	$\text{ctg}\,240° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

TRIGONOMETRIA. Razones Trigonométricas. Para Ángulos Mayores de 90°. Parte III

En esta lección obtendremos los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables del 4to cuadrante.

Para el ángulo 330 se tienen proyecciones en los ejes x y y de igual medida que las proyecciones de 30 la diferencia esta en los signos.



Para 30°

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\mathrm{sen}\, 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \csc 30° = 2$

$\mathrm{tg}\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \mathrm{ctg}\, 30° = \sqrt{3}$

330° pertenece a *IVc*

	IVc
senα	–
cosα	+
tgα	–

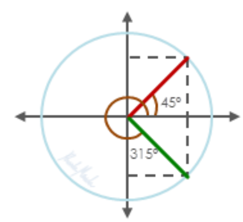
Para 330°

$\cos 330° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sec 330° = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\mathrm{sen}\, 330° = \frac{1}{2}$ $\quad \csc 330° = 2$

$\mathrm{tg}\, 330° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \mathrm{ctg}\, 330° = -\sqrt{3}$

Para el ángulo 315° se tienen proyecciones en los ejes x y y de igual medida que las proyecciones de 30° la diferencia esta en los signos.



Para 45°

$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sec 45° = \sqrt{2}$

$\mathrm{sen}\, 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \csc 45° = \sqrt{2}$

$\mathrm{tg}\, 45° = 1$ $\quad \mathrm{ctg}\, 45° = 1$

315° pertenece a *IVc*

	IVc
senα	–
cosα	+
tgα	–

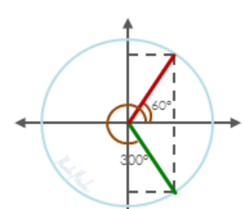
Para 315°

$\cos 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sec 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{sen}\, 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \csc 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\mathrm{tg}\, 315° = -1$ $\quad \mathrm{ctg}\, 315° = -1$

Para el ángulo 300° se tienen proyecciones en los ejes x y y de igual medida que las proyecciones de 60° la diferencia esta en los signos.



Para 60°

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\sec 60^\circ = 2$

$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ $\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

360° pertenece a *IVc*

	IVc
$\operatorname{sen}\alpha$	−
$\cos\alpha$	+
$\operatorname{tg}\alpha$	−

Para 300°

$\cos 300^\circ = \frac{1}{2}$ $\sec 300^\circ = 2$

$\operatorname{sen} 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\csc 300^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{tg} 300^\circ = -\sqrt{3}$ $\operatorname{ctg} 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

A Practicar

Hallar el valor de las expresiones dadas:

1. $3sen45° + 2cos45° - \sqrt{2}$
2. $4 - sen60° + cos30°$
3. $(1 - sen30°) + \left(cos30° + 2\sqrt{5}\right)$
4. $(cos30° - sen30°)^2$
5. $(sen45° - cos45°)(sen45° + cos45°)$
6. $(3cos60° - 5)(3cos60° + 7)$
7. $(cos90° - sen90° + 7cos45°)^2$
8. $(5sen90° - sen30° + 1)^2$

---

9. $2cos150° - 7sen150° - \sqrt{3}$
10. $1 + 6sen120° + 9cos120°$
11. $-2(sen135° - 8) + \left(cos135° + 2\sqrt{2}\right)$
12. $(cos240° + 4sen240°)^2$
13. $(sen150° - 12)(sen150° + 11)$
14. $(5cos135° - 8)(5cos135° - 9)$
15. $(2cos135° + cos180° - sen90° +)^2$
16. $(2sen120° - 3sen150° + 4)^2$

¿Lo Hicimos Bien?

1. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
2. 4
3. $\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}+4\sqrt{5}\right)$
4. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$
5. 0
6. $-\dfrac{119}{4}$
7. $\dfrac{7\sqrt{2}-2}{2}$
8. $\dfrac{121}{4}$

---

9. $-\dfrac{1}{2}\left(7+2\sqrt{3}\right)$
10. $\dfrac{1}{2}\left(6\sqrt{3}-7\right)$
11. $\dfrac{32-\sqrt{2}}{2}$
12. $\dfrac{49+8\sqrt{3}}{4}$
13. $-\dfrac{529}{4}$
14. $\dfrac{1}{2}\left(169-105\sqrt{2}\right)$
15. $6+4\sqrt{2}$
16. $\dfrac{37+20\sqrt{3}}{4}$