Sistema de Ecuaciones Logarítmicas

Marco Teórico:
Para resolver sistemas de ecuaciones logarítmicas tomaremos en cuenta la definición y las propiedades de los logaritmos. Para la resolución del sistema utilizaremos el mismo procedimiento que indicamos para resolver una ecuación logarítmica.
Veamos ejemplos de resolución de sistemas de ecuaciones logarítmicas.

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 & \text{(I)} \\ \log x - \log y = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Paso 1: En la segunda ecuación aplicamos la propiedad del cociente de un logaritmo, en el primer miembro y en segundo tenemos en cuenta que el logaritmo decimal de 10 es 1.

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log 10$$

Paso 2:Tomando en cuenta que ambos logaritmos tienen la misma base, lo igualamos, quedando de esta forma:

$$\frac{x}{y} = 10$$

Paso 3: Luego, despejamos "x"

$x = 10y$ le llamamos (a)

Paso 4: Sustituimos (a) en la Ecuación II

$100y^2 - y^2 = 11$ $y^2=11/99 \quad =1/9$

$y_1=1/3$; $y_2=-1/3$; $x= 10/3$

Ejemplo 2.

Algunos sistemas se pueden **resolver** directamente **por el método de reducción.**

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \underline{\log x - \log y = 1} \end{cases}$$
$$2\log x = 4$$

$\log x=2$ **$x=10^2$** **$x=100$**

$2 + \log y = 3$

$\log y=1$ **$y=10^1$** **$y=10$**

EJERCICIOS RESUELTOS

1.
$$\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - y = 20 \end{cases}$$

$\log(xy) = \log 100$ $xy = 100$ $x = \frac{100}{y}$

Paso1: Aplicamos propiedades de los logaritmos

$\frac{100}{y} - y = 20$ $y^2 + 20y - 100 = 0$

Paso 2: Sustituimos en la ecuación II

$y = \frac{-20 \pm \sqrt{400+400}}{2} = \frac{-20 \pm 20\sqrt{2}}{2} = -10 + 10\sqrt{2}$

Paso 3: Aplicamos la ecuación de segundo grado

La solución del sistema de ecuaciones:

y=10($\sqrt{2}-1$) **x=10($\sqrt{2}+1$)**

2. $\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

$\log(xy) = \log 2$ $xy = 2$ $x = \dfrac{2}{y}$

Paso 1: Aplicamos propiedad de los logaritmos.

$\left(\dfrac{2}{y}\right)^2 + y^2 = 5$ $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$

Paso 2: Sustituimos en la ecuación II

$$y^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{cases} y^2 = 4 & \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases} \\ y^2 = 1 & \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Paso 3: Aplicamos la ecuación de segundo grado.

y=2 **x=1**

y=1 **x=2**

Paso 4 : Obtenemos la solución del sistema de ecuación

3. $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\log x + 2\log y = 6 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$

Paso 1: Aplicamos el método de reducción

$4\log x = 5$ $\log x = \dfrac{5}{4}$ $x = 10^{\frac{5}{4}} = 10\sqrt[4]{10}$

Paso 2: Sustituimos logaritmo x en la ecuación I.

$\dfrac{5}{4} + \log y = 3$ $\log y = \dfrac{7}{4}$ $y = 10^{\frac{7}{4}} = 10\sqrt[4]{1000}$

Paso 3: Despejamos y. **y=10$^{7/4}$**

4. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

$\log\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log 10$

Paso 1: Aplicamos propiedades de los logaritmos.

$\dfrac{x}{y} = 10$ $x = 10y$

Paso 2: Despejamos x.

$100y^2 - y^2 = 11$

y^2=11/99 =1/9

Paso 3: Sustituimos en la ecuación I

y_1=1/3 ; y_2= -1/3 ; x= 10/3

5. $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$2\log x = 4$$

Paso 1: Restamos las ecuaciones.

$\log x = 2$ $\quad x = 10^2$ $\quad x = 100$

Paso 2: Despejamos x.
Paso 3: Sustituimos en la ecuación I.

$2 + \log y = 3$

Logy=1 $\quad$ y=10^1 $\quad$ y=10

6. $\begin{cases} \log_x(y-18) = 2 \\ \log_y(x+3) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 = y - 18 \\ y^{\frac{1}{2}} = x + 3 \end{cases}$$

Paso 1: Aplicamos las propiedades de los logaritmos.
Paso 2: Despejamos y sustituimos en la ecuacion I.

$y = (x+3)^2$ $\quad x^2 = (x+3)^2 - 18$

X=3/2 $\quad$ y=81/4

Paso 3: Obtenemos la solución del sistema.

7. $\begin{cases} x - y = 15 \ (I) \\ logx + logy = log10^{2} \ (II) \end{cases}$

Solución :

$\begin{cases} x - y = 15 \\ x.y = 100 \end{cases}$ Aplicamos propiedad de los logaritmos en ecuación (II)

Lo cual implica :

Paso 1: Despejando X en la ecuación I.

x=15+y (a)

Paso 2:Sustituyendo(a) en la ecuación II

(15+y).y=100

15y +y^2=100

Paso 3: Igualando a cero.

$y^2+15y-100=0$

Paso 4: Aplicando la ecuación de segundo grado, se obtiene:

Y=5 Es solución

Y=-20 No es solución, ya que no existe un logaritmo negativo.

Paso 5: Para obtener el valor de x, se sustituye (5) en (a).

X=15+y

X=15+5=20

8. $\begin{cases} logx + logy = 3\ (I) \\ logx - logy = -1 (II) \end{cases}$

Solución:

Paso 1: Se suman las dos ecuaciones.

2logx=2

Paso 2: Dividimos por 2 ambos miembros, y se resuelve

Logx=1 , x=10 (a)

Paso 3: Sustituimos (a) en la ecuación (I)

1+logy=3

Logy=3-1

Logy=2 ,y=10^2 **; y= 100**

9. $\begin{cases} x - y = 21 \\ logx + logy = 2 \end{cases}$

Solución:

Paso 1: Aplicando la propiedad de los logaritmos para transformar el sistema en otro algebraico.

$$\begin{cases} x - y = 21 \\ logx + logy = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 21 \\ \log\,(x.y) = 2 \end{cases}$$

Entonces: log xy=2

Paso 2:Como el log 100=2, escribimos la ecuación así:

Log xy=log100 ,de donde xy=100

Paso 3: Pasamos así al sistema algebraico siguiente:

$$x - y = 21\ (I)$$
$$x.y = 100\ (II)$$

Paso 4:Despejamos "y" de la ecuación (I)

x-y= 21

x-21=y (a)

Paso 5: Sustituimos (a)en la ecuación II

X(x-21)=100

X^2 -21x=100

X^2-21x-100=0 Resolvemos el sistema de ecuación.

Paso 6: Se obtiene: x=-4, x=25 La raíz x=-

4 NO ES VALIDA. Obtenemos y de la Ecuación (I)
Y=x-21
Y=25-21 ;y =4
La solución del sistema es:
X=25 ;y=4

10	$\begin{cases} logx + 3logy = 5 \\ log\dfrac{x}{y} = 1 \end{cases}$	Solución: El sistema es equivalente a: $\begin{cases} logx + 3logy = 5\ (I) \\ logx - logy = 1(II) \end{cases}$ **Paso 1:** Aplicando el método de reducción, multiplicamos por (-1) la ecuación II, y restamos las dos ecuaciones. 4 logy=4 **Paso 2:**Dividimos por 4 y resulta: Logy=1 ;y=10 **Paso 3:**Sustituyendo en la ecuación II Logx-logy=1 Logx-1=1 Logx=1+1 ,logx=2 ;x=100 **Paso 4**:Solución del sistema: **X=100 ,y=10**

Glosario

Sistema de Ecuaciones: Grupo de dos o más ecuaciones que comprenden dos o más variables.

Cuando el número de variables es mayor que el de las ecuaciones, por lo general existen muchas soluciones. Por ejemplo, x + y = 0. En este caso, el número de soluciones es ilimitado.

Si el número de variables es menor que el de las ecuaciones, por lo general, no existe solución, porque con frecuencia existen ecuaciones contradictoras comprendidas en el sistema dado.

Por ejemplo, 2x = 0, y 5x = 1.

Si el número de variables es igual al de las ecuaciones, tenemos la oportunidad de obtener una solución única para el sistema.

Otras Referencias

http://www.vitutor.com/al/log/se_l.html

http://www.mathematicsdictionary.com/spanish/vmd/full/s/systemofequations.htm

Videos
https://www.youtube.com/watch?v=BVNl8_9L67k