Operaciones con Polinomios

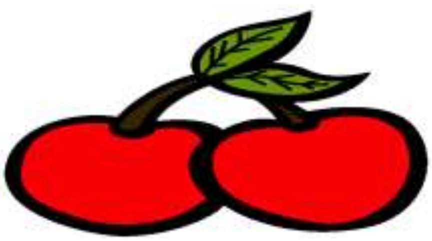
MARCO TEORICO

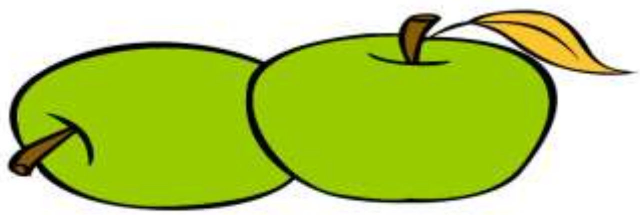
Un polinomio es una expresión que se construye por una o más variables, usando solamente las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y exponentes numéricos positivos.

Ejemplo:

Los polinomios son de gran ayuda para calcular los gastos de una compra a realizar como por ejemplo:

2x + 2y =?





Calcula los gastos de la siguiente compra, tomando en cuenta:

Valor de x= Bs 250

Valor de y= Bs 300

Entonces, sustituyendo los valores.

2x + 2y=?

2(250) +2(300) =

500+ 600= 1100

El gasto total en frutas es de Bs 1100.

Definición:

Se llama polinomio, en la variable x a cualquier expresión algebraica de la forma

$$P(x) = a_x x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde:

- n es número natural o cero llamado grado del polinomio. Este es el mayor exponente de la variable que aparezca en los términos no nulos del polinomio.
- a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , ... a_2 , a_1 , a_o son números reales con $a_n \neq 0$ si n ≠ o llamados coeficientes del polinomio.
- $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_o$ son los términos del polinomio.
- a_o es el coeficiente de grado cero o término independiente.

$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_o$

Ejemplos

- El polinomio $P(x) = 3 \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^3 - \sqrt{3} \cdot x^2 + i + 2 \cdot \sqrt{3}$ es de grado 4, tiene cinco términos y cuyos coeficientes son: $a_4 = 3$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \sqrt{3}$, $a_1 = i$, $a_o = 2 \cdot \sqrt{3}$
- La expresión $\frac{1}{3 \cdot x^2} + x^{-1} - 7 \cdot x^{\frac{-3}{2}}$ no es un polinomio, porque los exponentes de la variable x no son números reales.

Igualdad de polinomios

Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son iguales si tienen iguales los coeficientes del mismo grado.
Los polinomios $P(x) = 6 \cdot x^2 - 3 \cdot x^4 + 2 - 8 \cdot x$ y $Q(x) = -3 \cdot x^4 + 6 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 2$ son iguales.
Los polinomios $R(x) = 3 \cdot x^4 - 5 \cdot x^3 + 2 + 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1$ y $S(x) = 7 \cdot x^4 - 5 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1$ no son iguales, sus coeficientes no coinciden

Suma de polinomios

Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

P(x) = $2x^3 + 5x - 3$

Q(x) = $4x - 3x^2 + 2x^3$

1.Ordenamos los **polinomios**, si no lo están.

Q(x) = $2x^3 - 3x^2 + 4x$

P(x) + Q(x) = $(2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

2. Agrupamos los **monomios** del **mismo grado**.

P(x) + Q(x) = $2x^3 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4x - 3$

3. Sumamos los monomios semejantes.

$$P(x) + Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$$

Resta de polinomios

La resta de polinomios consiste en sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

$$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 4x - 3$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 3$$

Multiplicación de polinomios

1.Multiplicación de una constante por un polinomio

Es otro polinomio que tiene de grado el mismo del polinomio y como coeficientes el producto de los coeficientes del polinomio por el número.

$$3 \cdot (2x^3 - 3 x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

2.Multiplicación de un monomio por un polinomio

Se multiplica el monomio por todos y cada uno de los monomios que forman el polinomio.

$$3 x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2$$

3.Multiplicación de polinomios

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio.

$P(x) = 2x^2 - 3 \quad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) =$

$= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$

Se suman los monomios del mismo grado.

$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$

Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican. También podemos **multiplicar polinomios** de siguiente modo:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x \\
 & & & 2x^2 & -3 \\
\hline
 & & -6x^3 & +9x^2 & -12x \\
4x^5 & -6x^4 & +8x^3 & & \\
\hline
4x^5 & -6x^4 & +2x^3 & +9x^2 & -12x
\end{array}$$

División de Polinomios

Resolver la división de polinomios:

$P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8 \qquad Q(x) = x^2 - 2x + 1$

P(x) : Q(x)

Solución:

Paso 1:

A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio **no es completo** dejamos **huecos** en los lugares que correspondan.

$$\begin{array}{llll|l} x^5 & & +2x^3 & & -x-8 & x^2-2x+1 \\ \hline \end{array}$$

Paso 2:

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$x^5 : x^2 = x^3$

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

$$\begin{array}{lllll|l} x^5 & & +2x^3 & & -x-8 & x^2-2x+1 \\ \cline{6-6} \underline{-x^5} & \underline{+2x^4} & \underline{-x^3} & & & x^3 \\ & 2x^4 & +x^3 & & -x-8 & \end{array}$$

Volvemos a **dividir** el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$2x^4 : x^2 = 2\ x^2$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
\underline{-x^5} & \underline{+2x^4} & \underline{-x^3} & & & & x^3+2x^2 \\
 & 2x^4 & +x^3 & & -x & -8 & \\
 & \underline{-2x^4} & \underline{+4x^3} & \underline{-2x^2} & & & \\
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & -8 &
\end{array}
$$

Procedemos igual que antes.

$5x^3 : x^2 = 5\ x$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
\underline{-x^5} & \underline{+2x^4} & \underline{-x^3} & & & & x^3+2x^2+5x \\
 & 2x^4 & +x^3 & & -x & -8 & \\
 & \underline{-2x^4} & \underline{+4x^3} & \underline{-2x^2} & & & \\
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & -8 & \\
 & & \underline{-5x^3} & \underline{+10x^2} & \underline{-5x} & & \\
 & & & 8x^2 & -6x & -8 &
\end{array}
$$

Volvemos a hacer las mismas operaciones.

$8x^2 : x^2 = 8$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2+5x+8 \\ \cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & & & & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & & \\
 & & -5x^3 & +10x^2 & -5x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x^2 & -6x & -8 & \\
 & & & -8x^2 & +16x & -8 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 10x & -16 & \\
\end{array}
$$

$10x - 16$ es el **resto**, porque su **grado es menor que el del divisor** y por tanto no se puede continuar dividiendo.

x^3+2x^2+5x+8 es el **cociente**

EJERCICIOS RESUELTOS

1.	Dados los polinomios: $P(x) = 4x^2 - 1$ $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ Calcular: $P(x)+Q(x)$	Solución: $P(x) + Q(x) =$ $= (4x^2 - 1) + (x^3 - 3x^2 + 6x - 2)$ $= x^3 - 3x^2 + 4x^2 + 6x - 2 - 1$ **$= x^3 + x^2 + 6x - 3$**
2.	Dados los polinomios: $P(x) = 4x^2 - 1$	Solución: $P(x) - U(x) =$

	$U(x) = x^2 + 2$ Calcular: $P(x)\text{-}Q(x)$	$= (4x^2 - 1) - (x^2 + 2) =$ $= 4x^2 - 1 - x^2 - 2 =$ $= \mathbf{3x^2 - 3}$
3.	Dados los polinomios: $P(x) = 4x^2 - 1$ $R(x) = 6x^2 + x + 1$	Solución: $P(x) + R(x) =$ $= (4x^2 - 1) + (6x^2 + x + 1) =$ $= 4x^2 + 6x^2 + x - 1 + 1 =$ $= \mathbf{10x^2 + x}$
4.	Dados los polinomios: $P(x) = 4x^2 - 1$ $R(x) = 6x^2 + x + 1$ Calcula: $2P(x)\text{-}R(x)$	Solución: $2P(x) - R(x) =$ $= 2(4x^2 - 1) - (6x^2 + x + 1) =$ $= 8x^2 - 2 - 6x^2 - x - 1 =$ $= \mathbf{2x^2 - x - 3}$

5.	Dados los polinomios: $S(x) = 1/2x^2 + 4$ $T(x) = 3/2x^2 + 5$ $U(x) = x^2 + 2$ Calcula: $S(x) + T(x) + U(x) =$	Solución: $S(x) + T(x) + U(x) =$ $= (1/2x^2 + 4) + (3/2x^2 + 5) + (x^2 + 2) =$ $= 1/2\, x^2 + 3/2\, x^2 + x^2 + 4 + 5 + 2$ **$= 3x^2 + 11$**
6.	Dados los polinomios: $S(x) = 1/2x^2 + 4$ $T(x) = 3/2x^2 + 5$ $U(x) = x^2 + 2$ Calcula: $S(x) - T(x) + U(x) =$	Solución $S(x) - T(x) + U(x) =$ $= (1/2x^2 + 4) - (3/2x^2 + 5) + (x^2 + 2)$ $= 1/2x^2 + 4 - 3/2x^2 - 5 + x^2 + 2$ **$= 1$**
7.	Dados los siguientes polinomios: $P(x) = (x^4 - 2x^2 + 2)$ $Q(x) = (x^2 - 2x + 3)$ Calcula: $P(X) . Q(x)$	Solución: $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$ $x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 4x + 6$ $= x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 6x^2 -$

		$4x + 6 =$ $= x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x + 6$
8.	Dados los siguientes polinomios: $P(x)= (3x^2 - 5x)$ $Q(x)= (2x^3 + 4x^2 - x + 2)$ Calcula: $P(X) .Q(x)$	Solución: $P(X).Q(x)=$ $=(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x + 2) =$ $= 6x^5 + 12x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x^4 - 20x^3 + 5x^2 - 10x =$ $= 6x^5 + 12x^4 - 10x^4 - 3x^3 - 20x^3 + 6x^2 + 5x^2 - 10x =$ $= \mathbf{6x^5 + 2x^4 - 23x^3 + 11x^2 - 10x}$
9.	Determine: $(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2)$	Solución: $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \quad \vert\ x^2 + 3x - 2$ $\underline{-x^4 - 3x^3 + 2x^2} \quad\quad x^2 - 5x + 6$ $-5x^3 - 9x^2 + 30x$ $\underline{5x^3 + 15x^2 - 10x}$ $6x^2 + 20x - 20$ $\underline{-6x^2 - 18x + 12}$ $\mathbf{2x - 8}$

10	Determine: $(x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x) : (x^2 - x + 3)$	Solución: $x^6 \quad +5x^4 \quad +3x^2 - 2x \quad \lvert\ x^2 - x + 3$ $-x^6 + x^5 - 3x^4 \qquad x^4 + x^3 + 3x^2 - 6$ $x^5 + 2x^4$ $-x^5 + x^4 - 3x^3$ $3x^4 - 3x^3 + 3x^2$ $-3x^4 + 3x^3 - 9x^2$ $-6x^2 - 2x$ $6x^2 - 6x + 18$ **$-8x+18$**

Glosario

Otras Referencias

Videos.

LOGO GUAO

LOGO CK12